Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Es sei S eine Menge und

$$M = \operatorname{Abb}(S,S)$$

sei versehen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung. Ist die Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es ein (eindeutiges) neutrales Element, für welche $F \in M$ gibt es ein inverses Element?

Aufgabe 4.2. Sei M die Menge der Abbildungen einer zweielementigen Menge in sich selbst, also

$$M = \{F : \{0,1\} \to \{0,1\} : F \text{ Abbildung}\}.$$

Benenne die Elemente aus M und lege eine Wertetabelle für die Verknüpfung auf M an, die durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen definiert ist.

Aufgabe 4.3. Zeige, das zwei Mengen $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_2$, die beide die Peano-Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind. Man gebe also eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ an, die 0_1 in 0_2 überführt und die die Nachfolgeabbildungen respektiert.

Aufgabe 4.4. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Addition durch die Bedingungen

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x+y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.5. Zeige, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ und assoziativ ist und dass die Abziehregel (d.h., dass aus $n+k = m+k$ für ein k stets $n = m$ folgt) gilt.

AUFGABE 4.6. Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peanomodell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Multiplikation durch die Bedingungen

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

AUFGABE 4.7. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion, dass die Beziehung

$$\{0, \ldots, n'\} = \{0, \ldots, n\} \cup \{n'\}$$

gilt.

(Zur Erinnerung: $\{0, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$.)

AUFGABE 4.8. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

AUFGABE 4.9. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

AUFGABE 4.10. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} .$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 .$$

AUFGABE 4.11. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.12. (3 Punkte)

Es sei $(\mathbb{N}, 0,')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass für $x, y \in \mathbb{N}$ die Beziehung $x \leq y$ genau dann gilt, wenn es ein $z \in \mathbb{N}$ gibt mit $y = x + z$.

Aufgabe 4.13. (7 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, 0,')$ ein Peanomodell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 4.10 festgelegten Multiplikation. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2)
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. 1 ist das neutrale Element für die Multiplikation.

(3)
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Multiplikation ist kommutativ.

(5) Die Multiplikation ist assoziativ.

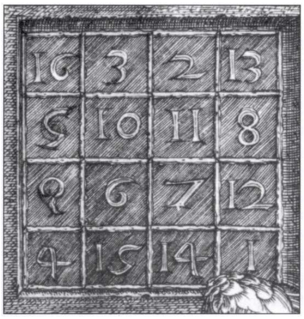
(6) Aus einer Gleichung $n \cdot k = m \cdot k$ mit $k \neq 0$ folgt $n = m$ (*Kürzungsregel*).

(7) Für beliebige $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(Distributivgesetz).

Aufgabe 4.14. (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein „magisches Quadrat“ zur Seitenlänge n ist eine Anordnung der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2$ in ein $n \times n$-Quadrat derart, dass die Summe aller Zeilen, die Summe aller Spalten und die Summe der beiden Diagonalen konstant ist. Welcher Wert ist das?

Formuliere mittels Abbildungen, was ein magisches Quadrat ist, und drücken Sie die Summenbedingungen mit dem Summenzeichen und geeigneten Indexmengen aus.



Ausschnitt aus Albrecht Dürers Melencolia I.

Aufgabe 4.15. (3 Punkte)

Wir sagen, dass zwei magische Quadrate Q_1 und Q_2 äquivalent sind, wenn sie durch eine Folge aus Drehungen oder Spiegelungen ineinander überführt werden können (dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation). Zeige, dass alle magischen Quadrate zur Seitenlänge 3 untereinander äquivalent sind. Wie viele Elemente enthält die Quotientenmenge und wie viele die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 4.16. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 4.17. (2 Punkte)

Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2\,.$$

Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

Aufgabe 4.18. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion die Abschätzung

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

Abbildungsverzeichnis