Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 30

Aufwärmaufgaben

Auch weiterhin viel Spaß im Mathematik-Studium!

Aufgabe 30.1. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 30.2. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 30.3. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.4. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z \cos z\,,$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 30.5. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 30.6. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 30.7. Es sei $p \in \mathbb{R}[U]$ ein Polynom und

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 30.8. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 30.9. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgaben zum Abgeben

Die folgende Aufgabe setzt Aufgabe 28.9 voraus.

Aufgabe 30.10. (4 Punkte)

Es sei

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 30.11. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zum Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin(\cos z) + z^3 \exp(z^2).$$

Aufgabe 30.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin x \cos x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 30.13. (6 Punkte)

Sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0\,, \\ 1 \text{ für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon\,, \\ 0 \text{ für } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 30.14. (3 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 30.15. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Abbildungsverzeichnis