Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 25

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 25.1. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

AUFGABE 25.2. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

AUFGABE 25.3. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

AUFGABE 25.4. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zeige, dass die Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

summierbar ist.

AUFGABE 25.5. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Berechne zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

die Teilsummen

$$s_k = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{z^k z^\ell}$$

zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und berechne $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k$.

AUFGABE 25.6. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zu $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$I_j = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 |\, k - \ell = j\}\,.$$

Berechne zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

die Teilsummen
$$t_j = \sum_{(k,\ell)\in I_j} \frac{1}{z^k z^\ell}$$
und berechne $\sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j$.

Aufgabe 25.7. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 25.8. Es seien
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$
zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$
gegeben ist.

Aufgabe 25.9. Sei $z \in \mathbb{C}$, $\mid z \mid < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} .$$

Aufgabe 25.10. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgabe 25.11. Es sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)^3 .$$

Aufgabe 25.12. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$
nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Wertemenge ist.[1]

[1] Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 25.13. Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin(z+w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgaben zum Abgeben

Die nächste Aufgabe befasst sich mit der *g-adischen Entwicklung* von reellen Zahlen, vergleiche Aufgabe 24.16.

Aufgabe 25.14. (6 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Es sei eine Ziffernfolge

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben und es sei

$$r = \sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i$$

die durch diese Ziffernfolge definierte reelle Zahl. Zeige, dass die Ziffernfolge genau dann ab einer gewissen Stelle *periodisch* ist, wenn r eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 25.15. (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus allen Zahlen besteht, in deren Dezimalentwicklung keine 9 vorkommt. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

summierbar ist.

Aufgabe 25.16. (4 Punkte)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 25.17. (4 Punkte)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

AUFGABE 25.18. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)^4 .$$

AUFGABE 25.19. (8 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{a^2+b^2},\ a,b \in \mathbb{N}_+ ,$$

summierbar ist oder nicht.

AUFGABE 25.20. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $\mid z \mid \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$\mid R_{N+1}(z) \mid \leq \frac{2}{(N+1)!} \mid z \mid^{N+1}$$

gilt.

AUFGABE 25.21. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten 4 Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

AUFGABE 25.22. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$(\frac{\exp n}{n^d})_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[2]

[2]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.