Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 21.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f : [a, b] \longrightarrow X$$

und

$$g : [b, c] \longrightarrow X$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h : [a, c] \longrightarrow X$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 21.3. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Zeige mit jeder der Charakterisierungen aus Satz 20.3, dass diese Funktion nicht stetig ist.

Aufgabe 21.4. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto |\, x \,|,$$

stetig ist.

Aufgabe 21.6. Es sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 21.7. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion
$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$
die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 21.8. Es sei I ein nichtleeres reelles Intervall und $x \in I$ ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von $I \setminus \{x\}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 21.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $X = A \cup B$ mit nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq X$ und $A \cap B = \emptyset$. Es gebe ein $\delta > 0$ mit
$$d(x, y) \geq \delta \text{ für alle } x \in A,\ y \in B\,.$$
Zeige, dass A (und auch B) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Ein nichtleerer metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X$$
gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Aufgabe 21.10. Zeige, dass ein wegzusammenhängender metrischer Raum zusammenhängend ist.

Aufgabe 21.11. Zeige, dass der $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 21.12. Sei $n \geq 2$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 21.13. Sei T eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass T wegzusammenhängend ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.14. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 21.15. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 21.17. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die folgende Relation auf X: Es ist $x \sim y$, falls es eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 21.18. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a, b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 21.19. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$n \mapsto x_n = (1 + \frac{1}{2n})^n \,.$$

Aufgabe 21.20. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 3 cm und die Ecklöcher seien ein Kreis mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

a) (63.5, 63.5)

b) (100, 100)

c) (63.5, 192,5)

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Welche Winkeltoleranz liegt in a) bis d) vor, wenn man die anliegenden Banden mitberücksichtigt?

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 21.21. (5 Punkte)

Fertige in der Situation der Aufgabe 21.20 eine hochladbare Grafik an, die auf dem Billardtisch die Linien von gleichem Schwierigkeitsgrad (also gleicher Winkeltoleranz zum Einlochen) zeigt.