Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 19.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge X sind offen.
(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

AUFGABE 19.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen sind.

AUFGABE 19.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

AUFGABE 19.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in X die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit
$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

AUFGABE 19.5. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

AUFGABE 19.6. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 19.7. Zeige, dass auf jeder Menge X die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 19.8. Sei X eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von X sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.9. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\mid z \mid < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 19.10. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\mid z \mid > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

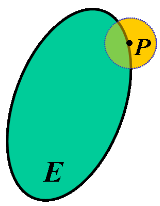
Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von T, wenn für jedes $\epsilon > 0$ der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus T als auch Punkte aus $X \setminus T$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von T heißt *Rand* von T, geschrieben $\operatorname{Rand}(T)$.



Aufgabe 19.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.13. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \operatorname{Rand}(T)$$

offen ist.

Aufgabe 19.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T genau dann leer ist, wenn T sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.15. Zeige, dass die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.16. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.17. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.18. (2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.19. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $T \subseteq Y$ genau dann offen in Y ist, wenn es eine in X offene Menge U gibt mit $T = Y \cap U$.

Aufgabe 19.20. (3 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Folge in einem metrischen Raum genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 19.21. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 19.22. (3 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\operatorname{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

Aufgabe 19.23. (4 Punkte)

Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 19.24. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.25. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.

Aufgabe 19.26. (6 Punkte)

Man gebe eine Folge reeller Zahlen derart an, dass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

Abbildungsverzeichnis