Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18.2. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_M. Zeige direkt, dass
$$\chi_M(M) = 0$$
gilt.

Die beiden nächsten Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt
$$\operatorname{Spur} M := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
die *Spur* von M.

Aufgabe 18.3. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Spur M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 18.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_M = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} .$$

Zeige, dass

$$\text{Spur } M = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$

ist.

Aufgabe 18.5. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 18.6. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 18.7. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$|| v + w ||^2 = || v ||^2 + || w ||^2 \ .$$

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $U_1, \ldots, U_m$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Man sagt, dass V die *direkte Summe* der U_i ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erüllt sind.

(1) $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$.
(2) Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung

$$v = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$$

mit $u_i \in U_i$.

Aufgabe 18.8. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass V die direkte Summe aus U und dem orthogonalen Komplement $U^{\perp}$ ist.

Aufgabe 18.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v,w \rangle = \frac{1}{2}(|| v+w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2)$$

gilt.

Aufgabe 18.10. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v+w ||^2 + || v-w ||^2 = 2 \, || v ||^2 + 2 \, || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 18.11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u,v,w \in V$).

(1) Es ist $d(v,w) \geq 0$.
(2) Es ist $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
(3) Es ist $d(v,w) = d(w,v)$.
(4) Es ist
$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w) \,.$$

Aufgabe 18.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, \, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.13. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 18.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn V die direkte Summe seiner Eigenräume ist.

Aufgabe 18.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und seien $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$ Matrizen, die in der Beziehung

$$M = BNB^{-1}$$

mit einer invertierbaren Matrix $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ stehen. Zeige, ohne das charakteristische Polynom zu verwenden, dass

$$\operatorname{Spur} N = \operatorname{Spur} M$$

ist.

Aufgabe 18.17. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann nilpotent ist, wenn das charakteristische Polynom $\chi_\varphi = X^n$ ist.

Aufgabe 18.18. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wir betrachten im Polynomring $K[X]$ die Teilmenge

$$I = \{P \in K[X] | \, P(M) = 0\} .$$

Es sei $F \in K[X]$, $F \neq 0$, derart, dass es in I kein Polynom von kleinerem Grad gibt. Zeige: Jedes Element $G \in I$ kann man schreiben als

$$G = FQ$$

mit einem $Q \in K[X]$.

Aufgabe 18.19. (3 Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Aufgabe 18.20. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \ldots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

Aufgabe 18.21. (6 Punkte)

Man beweise das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren*. Das besagt, dass man in einem euklidischen Vektorraum aus einer gegebenen Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ basteln kann derart, dass die erzeugten Unterräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle$$

übereinstimmen für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 18.22. (6 Punkte)

Formuliere und beweise den „orthonormalen Basisergänzungssatz“.

Aufgabe 18.23. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jeden Vektor v mit $|| v ||= 1$ ist auch $|| \varphi(v) ||= 1$.
(3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis.
(4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis ist.

Aufgabe 18.24. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis