Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 17.2. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 17.3. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich null sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 17.4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi : K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$,
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$,
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 17.5. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 17.6. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 17.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 17.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{End}\,(V) = \{\varphi : V \to V \,|\, \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Aufgabe 17.9. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$-X^3 + 6X^2 - 6X + 27$$

die Variable X durch die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Aufgabe 17.10. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\mathrm{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}\,.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 17.11. Zeige durch Induktion, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 17.12. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 17.13. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.14. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 17.15. Es sei K der Körper mit zwei Elementen und betrachte darüber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_M nicht das Nullpolynom ist, dass aber

$$\chi_M(\lambda) = 0$$

ist für alle $\lambda \in K$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.16. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i) .$$

Aufgabe 17.17. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 17.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

Aufgabe 17.19. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det (\lambda E_n - M)$$

gilt

Aufgabe 17.20. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

ist.

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 17.22. (8 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring, der die Eigenschaft erfüllt: wenn $rs = 0$ ist, so ist $r = 0$ oder $s = 0$. Zeige, dass man auf folgende Weise einen Körper K konstruieren kann, der R enthält.

Wir betrachten auf

$$M = R \times (R \setminus \{0\})$$

die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc ,$$

definierte Relation.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Definiere auf der Quotientenmenge $Q(R)$ Verknüpfungen derart, dass $Q(R)$ zu einem Körper wird und dass

$$\varphi : R \longrightarrow Q(R),\ r \longmapsto [(r, 1)],$$

mit Addition und Multiplikation verträglich ist und $\varphi(1) = 1$ ist.

Aufgabe 17.23. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei

$$P = \{F \in K[X] | \text{ Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\} .$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

(1) Entweder $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 17.24. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 17.23, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.