Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 12.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $\lambda \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\, v \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.[1]

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $v \in V$ die Abbildung

$$K \longrightarrow V,\, \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

Aufgabe 12.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $K \times V$ versehen mit der Vektorraumstruktur des Produktraumes (siehe Aufgabe 10.1). Betrachte die Skalarmultiplikation

$$K \times V \longrightarrow V,\, (\lambda, v) \longmapsto \lambda v.$$

Handelt es sich hierbei um eine lineare Abbildung?

Aufgabe 12.5. Ergänze den Beweis zu Satz 12.3 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

[1] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor λ.

Aufgabe 12.6. Es sei K ein Körper und seien U, V, W K-Vektorräume. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 12.7. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild bild $\varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Unterraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.

Aufgabe 12.8. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 12.9. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Im}(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 12.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass V und W genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 12.11. Es sei K ein Körper. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien K-Vektorräume V_i und W_i sowie lineare Abbildungen

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow W_i$$

gegeben. Zeige, dass dann auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_n : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n ,$$

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2), \ldots, \varphi_n(v_n)) ,$$

eine lineare Abbildung zwischen den Produkträumen ist.

Aufgabe 12.12. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 12.13. Zeige durch ein Beispiel von zwei Basen v, u und v, w im $\mathbb{R}^2$, dass die Koordinatenfunktion v^* von der Basis, und nicht nur von v abhängt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.14. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 12.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V, \, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i ,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 12.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung ein Untervektorraum des Produktraumes $V \times W$ ist.

Aufgabe 12.17. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi : G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa : G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für kern π, für kern κ und für kern $(\pi \times \kappa)$.

Aufgabe 12.18. (2 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaft gilt. $\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$ für alle $g, g' \in G$.

Aufgabe 12.19. (4 Punkte)

Seien V und W zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ bereits $\mathbb{Q}$-linear ist.