

Mathematik I**Arbeitsblatt 11****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 11.1. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_i , $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i , $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i , $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

AUFGABE 11.2. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf V , die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 11.3. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V , die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ gibt mit } v = \lambda w$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

AUFGABE 11.4. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und v_i , $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Beweise die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
- (2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
- (3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
- (6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

AUFGABE 11.5. Man gebe im \mathbb{R}^3 drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

AUFGABE 11.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Standardbasis

$$e_i, i = 1, \dots, n,$$

eine Basis des K^n ist.

AUFGABE 11.7. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und sei $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Es sei $\lambda_i, i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K . Zeige, dass die Familie $v_i, i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V , eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i, i \in I$, gilt.

AUFGABE 11.8. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren v_1, \dots, v_n in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) v_1, \dots, v_n bilden eine Basis von V .
- (2) v_1, \dots, v_n bilden ein Erzeugendensystem von V .
- (3) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

AUFGABE 11.9. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0.$$

AUFGABE 11.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0.$$

AUFGABE 11.11. Zeige, dass im \mathbb{R}^3 die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 11.12. Bestimme, ob im \mathbb{C}^2 die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 + 7i \\ 3 - i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15 + 26i \\ 13 - 7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 11.13. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(i) = 1, f(1) = 1 + i, f(1 - 2i) = -i.$$

AUFGABE 11.14. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 11.15. (4 Punkte)

Es sei \mathbb{Q}^n der n -dimensionale Standardraum über \mathbb{Q} und sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine \mathbb{Q} -Basis des \mathbb{Q}^n ist, wenn diese Familie aufgefasst im \mathbb{R}^n eine \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^n bildet.

AUFGABE 11.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im \mathbb{R}^3 die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 11.17. (2 Punkte)

Bestimme, ob im \mathbb{C}^2 die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 - 7i \\ -3 + 2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5 + 6i \\ 3 - 17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 11.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n - 1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

AUFGABE 11.19. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_1, \dots, v_m eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i, i = 1, \dots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

AUFGABE 11.20. (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0, f(-1) = 1.$$