Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 10.2. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 10.3. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 10.4. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \operatorname{Abb}(J, K)$ in natürlicher Weise ein Unterraum von K^I ist.

Aufgabe 10.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum. Er stimmt mit dem Durchschnitt

$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum}, \, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$

überein.

(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Aufgabe 10.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 10.7. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum von K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 10.8. Man gebe ein Beispiel für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem derart, dass die Lösungsmenge unendlich ist und kein Untervektorraum ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.9. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 10.10. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 10.11. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \text{Abb}(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \{f \in K^I \mid f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

ein Unterraum von K^I ist.

Zu jedem $j \in I$ sei e_j gegeben durch

$$e_j(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Man zeige, dass sich jedes Element $f \in K^I$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_j, $j \in J$, darstellen lässt.

Aufgabe 10.12. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{Cauchyfolge in } K\}.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{Folge in } K\}$$

ist.

In der folgenden Aufgabe - wie bei jeder Rechenaufgabe - führen „Rechenfehler“[1] zu deutlichem Punktabzug!

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4w & = & 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w & = & 7 \\ x + z & = & 9 \\ x + 5y + 5z + w & = & 0\,. \end{array}$$

[1]Um das Thema Rechenfehler ranken sich weit verbreitete Mythen von Nichtmathematikern. Ein echter Rechenfehler ist so was wie $3 + 4 = 9$, doch tritt das nicht auf. In Wahrheit verbergen sich hinter „Rechenfehlern“ substantielle Denkfehler, falsches Operieren mit Vorzeichen, Fehlinterpretation von Klammern, Vertauschungen, mangelnde Organisation der zu verarbeitenden Information, schlichtes Ignorieren von relevanten Daten, unzureichende Buchführung über Zwischenergebnisse. Bei einer „Rechenaufgabe“ geht es nicht darum zu zeigen, dass man ein Verfahren verstanden hat, sondern dass man ein Verfahren korrekt durchführen kann. Zum Glück gibt es hinreichend viele Beweisaufgaben.

Aufgabe 10.14. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.