Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematatik II

Vorlesung 55

Lineare Differentialgleichungssysteme

Definition 55.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t,v) \longmapsto f(t,v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \ldots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \ldots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt $t \in I$ eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \ldots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \ldots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Für lineare Differentialgleichungen gibt es wieder eine inhomogene Variante.

Definition 55.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.* Die Abbildung z heißt dabei *Störabbildung.*

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \ldots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \ldots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen a_{ij} und z_i ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare Differentialgleichungen zurückführen und dadurch lösen.

Lemma 55.3. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ und $z_i : I \to \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n\ (t_0 \in I)$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n\,,$$

$$v'_{n-1} = a_{n-1\,n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1\,n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1}\,,$$

$$v'_{n-2} = a_{n-2\,n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2\,n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2\,n}(t)v_{n-1}(t) + z_{n-2}(t)$$
$$\text{mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$v'_1 = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1\,,$$

löst.

Beweis. Das ist trivial. □

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Falls die Funktionen a_{ij} alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen

Definition 55.4. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.*

Definition 55.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist und

$$z : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

Trigonalisierbare lineare Abbildungen

Um die Lösungstheorie für Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu entwickeln, müssen wir über trigonalisierbare lineare Abbildungen sprechen, einem wichtigen Kapitel der linearen Algebra, das zur Eigenraumtheorie gehört.

Eine Fahne setzt sich aus dem Fußpunkt, der Fahnenstange, dem Fahnentuch und dem Raum, in dem das Tuch weht, zusammen.

Definition 55.6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V.

Definition 55.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ *φ-invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

DEFINITION 55.8. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und

$$f : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

heißt *f-invariant*, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ ist für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

DEFINITION 55.9. Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$f : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißtf *trigonalisierbar*, wenn V eine f-invariante Fahne besitzt.

SATZ 55.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*
(2) *Die Abbildung φ wird bzgl. einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben.*
(3) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ bzgl. einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle .$$

Da es sich dabei um eine φ-invariante Fahne handelt, gilt

$$\varphi(v_i) = b_{1i}v_1 + b_{2i}v_2 + \ldots + b_{ii}v_i .$$

Bzgl. dieser Basis besitzt die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt. (2) $\Rightarrow$ (3). Das charakteristische Polynom von φ ist gleich dem charakteristischen Polynom χ_M, wobei M eine beschreibende Matrix bzgl. einer beliebigen Basis ist. Wir können also eine obere Dreiecksmatrix nehmen, und daher ist nach Lemma 14.8 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen. (3) $\Rightarrow$ (1). Induktion nach n, für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n \geq 1$ und sei die Aussage für alle Endomorphismen auf Vektorräumen der Dimension $< n$ schon bewiesen. Es sei λ_1 eine Nullstelle von $P = \chi_\varphi$. Dann gibt es nach Satz 17.8 einen Eigenvektor $v_1 \in V$ zum Eigenwert λ_1. Es sei $u_2, \ldots, u_n$ eine Ergänzung von v_1 zu einer Basis von V. Wir setzen $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$, dies ist ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum. Es ist

$$\varphi(u_i) = a_i v_1 + b_{2i}u_2 + \ldots + b_{ni}u_n .$$

Durch die Festlegung

$$g(u_i) = a_i v_1 \in V$$

erhalten wir eine lineare Abbildung

$$g : U \longrightarrow V,$$

und durch die Festlegung

$$h(u_i) = b_{i2}u_2 + \ldots + b_{in}u_n$$

erhalten wir eine lineare Abbildung

$$h : U \longrightarrow U.$$

Mit diesen Abbildungen gilt

$$\varphi(u) = g(u) + h(u)$$

für $u \in U$, da dies für die Basis gilt. In der Basis $v_1, u_2, \ldots, u_n$ besitzt φ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} .$$

Die Teilmatrix N rechts unten ist dabei die beschreibende Matrix von h. Für das charakteristische Polynom gilt die Beziehung

$$\chi_M = (X - \lambda_1)\chi_N ,$$

so dass nach Lemma 17.4 auch $\chi_N = \chi_h$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir können also auf $h : U \to U$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. D.h. es gibt eine h-invariante Fahne

$$0 = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_{n-2} \subset U_{n-1} = U .$$

Damit definieren wir $V_{i+1} = Kv_1 + U_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und erhalten die Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V .$$

Diese Fahne ist f-invariant. Dies ist für V_1 klar, da dies ein Eigenraum ist. Ansonsten gilt für $v \in V_i$ mit $v = cv_1 + u$ mit $u \in U_i$ die Beziehung

$$\varphi(cv_1 + u) \, = \, c\lambda v_1 + \varphi(u) \, = \, c\lambda v_1 + g(u) + h(u) \, = \, (c\lambda + a)v_1 + h(u),$$

und dies gehört zu V_i.

Der Zusatz ergibt sich wie folgt.Die trigonalisierbare Abbildung φ werde bzgl. der Basis $\mathfrak{u}$ durch die Matrix M beschrieben, und bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ durch die obere Dreiecksmatrix D. Dann gilt nach Korollar 13.11 die Beziehung $T = BMB^{-1}$, wobei B den Basiswechsel beschreibt. □

Korollar 55.11. *Es sei $M \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 55.10 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Abbildungsverzeichnis