Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 52

Beispiel 52.1. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 48.5 an. Der einzige kritische Punkt ist $P = (1,0)$, ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch $x = 1$ gegebenen Geraden und der durch $y = 0$ gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}_+$ bestimmt (für nichtpositives c sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als $e^{(\ln x)y} = c$ und daher als

$$(\ln x)y = \ln c\,.$$

Bei $x \neq 1$ kann man dies zu

$$y = \frac{\ln c}{\ln x}$$

auflösen und bei $y \neq 0$ zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}\,.$$

Der Satz über die injektive Abbildung

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

Satz 52.2. *Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in V$ ein Punkt, indem das total Differential $(D\varphi)_P$ injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass $\varphi|_U$ injektiv ist.

Beweis. Es sei $\dim(V) = k$ und $\dim(W) = n$. Es sei $B = (D\varphi)_P(V)$ das Bild des totalen Differentials $(D\varphi)_P$. Nach Lemma 12.5 ist $B \subseteq W$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim(B) = k$. Wir ergänzen eine Basis von B durch $w_1, \ldots, w_{n-k}$ zu einer Basis von W und setzen $C = \langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : G \times C \longrightarrow W,\ (v,w) \longmapsto \varphi(v) + w,$$

wobei links und rechts zwei n-dimensionale Vektorräume stehen. Diese Abbildung kann man auffassen als die Hintereinanderschaltung

$$G \times C \stackrel{\varphi \times \mathrm{Id}_C}{\longrightarrow} W \times C \stackrel{+}{\longrightarrow} W .$$

Daher ist die Gesamtabbildung stetig differenzierbar und das totale Differential ist $(D\varphi)_P + i_C$, wobei $i_C : C \to W$ die lineare Einbettung des Unterraums ist. Dieses totale Differential ist surjektiv im Punkt $(P,0)$, da sowohl B als auch C zum Bild gehören, und somit bijektiv. Wir können also den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten offene Mengen $U_1 \subseteq G \times C$ und $U_2 \subseteq W$ derart, dass $(\varphi \times \mathrm{Id}_C)|_{U_1}$ ein Diffeomorphismus zwischen U_1 und U_2 ist. Dies können wir einschränken auf eine offene Menge der Form $U_3 \times U_4 \subseteq U_1$ mit $P \in U_3 \subseteq G$ und $0 \in U_4 \subseteq C$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi|_{U_3} : U_3 \longrightarrow W$$

injektiv, da dies die Hintereinanderschaltung

$$U_3 \longrightarrow U_3 \times U_4 \longrightarrow U_2 \subseteq W$$

mit $Q \mapsto (Q,0)$ ist. □

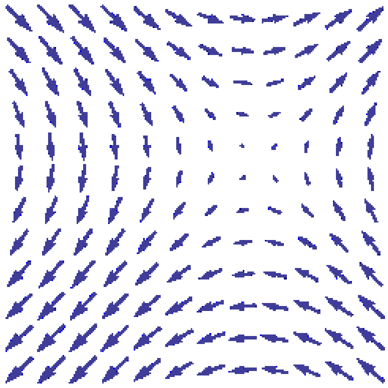
Vektorfelder

Wir kehren nun zu *gewöhnlichen Differentialgleichungen* zurück, wobei wir im Unterschied zu den beiden Vorlesungen 37 und 38 erlauben, dass die Lösungskurven Kurven in einem höherdimensionalen Vektorraum sind. Mit gewöhnlich wird ausgedrückt, dass die Definitionsmengen der Lösungen eindimensional sind (Differentialgleichungen, deren Lösungen eine höherdimensionale Definitionsmenge ist, heißen *partielle Differentialgleichungen*). Wir werden zuerst beschreiben, welche Daten eine gewöhnliche Differentialgleichung auszeichnen und dann einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung beweisen, den *Satz von Picard-Lindelöf*. Später werden wir uns hauptsächlich auf lineare Differentialgleichungssysteme beschränken.

Definition 52.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $U \subseteq V$ eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein *Vektorfeld* (auf U).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass t die Zeit repräsentiert, v den Ort und $f(t, v) \in V$ einen Vektor, der zum Zeitpunkt t an den Ortspunkt v angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Wenn das Vektorfeld nicht von t abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 52.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Dann nennt man

$$v' = f(t, v)$$

die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld f.

Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

Definition 52.5. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t, v)$$

heißt eine Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall $J \subseteq I$[1] eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $v(t) \in U$ für alle $t \in J$.
(2) Die Abbildung v ist differenzierbar.
(3) Es ist $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$.

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, eine vektorwertige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V.$$

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \ldots, v_n(t))$$

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch n, von t und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ abhängige Funktionen $(f_1, \ldots, f_n)$ beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \ldots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \ldots, v_n) \end{pmatrix}.$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem.*

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

Definition 52.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ mit der *Anfangsbedingung* $v(t_0) = w$.

Definition 52.7. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

[1]Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung“ natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

Lipschitz-Bedingungen

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Für den Satz von Picard-Lindelöf wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 52.8. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt mit

$$||\, f(t, u) - f(t, v)\, || \leq L \cdot\ ||\, u - v\, ||$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$.

Definition 52.9. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t, v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t, v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

gibt derart, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

LEMMA 52.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v_1, \ldots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \ldots, v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Sei $P = (t, v) = (t, v_1, \ldots, v_n)$ ein Punkt in $I \times U$ und sei

$$U(t, \epsilon) \times U(v, \epsilon)$$

eine offene Umgebung von P innerhalb von $I \times U$ derart, dass auch

$$B = B(t, \epsilon) \times B(v, \epsilon) \subseteq I \times U$$

ist. Dieses B ist eine abgeschlossene Umgebung von P und daher kompakt. Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$ nach Voraussetzung stetig sind, gibt es nach Satz 22.7 eine gemeinsame Schranke $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|| \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) || \leq c$$

für alle $Q \in B$. Daher gibt es für die Matrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Schranke L mit

$$|| (\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q))_{1 \leq i,j \leq n} || \leq L.$$

Man kann daher zu jedem festen Zeitpunkt $s \in U(t, \epsilon)$ Lemma 49.3 anwenden und erhält für $u, u' \in U(v, \epsilon)$ die Abschätzung

$$|| f(s, u) - f(s, u') || \leq L \cdot || u - u' || .$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis