Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 50

Diffeomorphismen

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 50.1. Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt *C^k-Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k-mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1-Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k-Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen *C^k-diffeomorph*, wenn es einen C^k-Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt.

Definition 50.2. Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ, wenn

$$\operatorname{rang} (D\varphi)_P = \min (\dim (V), \dim (W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Bemerkung 50.3. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi : G \to W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Korollar 14.2 und nach Lemma 14.3 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim (W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit der Definition überein. Bei $\dim (V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim (V) \leq \dim (W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P, dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Beispiel 50.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1+y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y\,,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt bspw. ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U(0, r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Art

$$(\pm x, -1)\,.$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) \;=\; (x^2 - (-1), x + x(-1)) \;=\; (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreischeibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben. Betrachten wir hingegen $U_1 = U(0, r)$ mit $r \leq 1$ und $U_2 := \varphi(U_1)$. Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 50.9 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung

$\varphi|_{U_1} : U_1 \to U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) \;=\; x^3 + (1 - u)x \;=\; v.$$

Die Ableitung von $x^3 + (1-u)x$ nach x ist $3x^2 + (1-u)$. Sei von nun an $r = \frac{1}{2}$. Dann ist

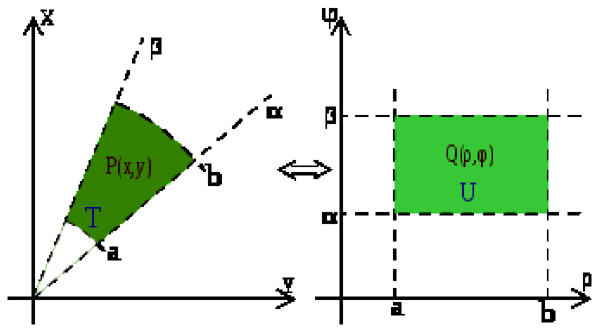
$$u = x^2 - y < 1.$$

Daher ist $3x^2 + (1-u) > 0$ und somit ist $x^3 + (1-u)x$ streng wachsend in x nach Satz 28.5. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u, v) \in U_2$ nur ein x, das die Bedingung

$$x^3 + (1-u)x = v$$

erfüllt. Wegen $x(y+1) = v$ ist dann auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt. Dies ist klar bei $x \neq 0$ und bei $x = 0$ folgt es aus der ersten Bedingung $x^2 - y = u$.

Wir haben schon für die komplexen Zahlen Polarkoordinaten verwendet, siehe Satz 29.12. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



Beispiel 50.5. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (r, \alpha) \longmapsto (r\, \cos\, \alpha\, , r\, \sin\, \alpha\,),$$

heißt *Polarkoordinatenabbildung*. Sie ordnet einem Radius und einem Winkel denjenigen Punkt der Ebene zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r, α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\, \alpha & -r\, \sin\, \alpha \\ \sin\, \alpha & r\, \cos\, \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α, periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r = 0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0, 0)$. Ferner ist $\varphi(-r, \alpha+\pi) = \varphi(r, \alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\, \cos^2\, \alpha\, +\, \sin^2\, \alpha\,) = r\, .$$

Bei $r \neq 0$ liegt also nach Satz 14.3 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt (r, α) mit

$r \neq 0$ eine offene Umgebung $(r, \alpha) \in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei $r > 0$ kann man bspw. als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 =]r - \delta, r + \delta[\times]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit $r > \delta > 0$ und mit $\pi > \epsilon > 0$ wählen. Das Bild davon, also U_2, ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r - \delta$ und $r + \delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha - \epsilon$ und $\alpha + \epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, bspw. zu

$$\mathbb{R}_+ \times] - \pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | \, x \leq 0\}, \; (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha \, , r \sin \alpha \,).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 29.11. Wenn man das offene Intervall $] - \pi, \pi[$ durch das halboffene Intervall $] - \pi, \pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+ \times] - \pi, \pi]$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

Abbildungsverzeichnis