**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2010**

# Mathematik II

## Vorlesung 49

### Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz 49.1. *Es sei $M$ ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und*
$$f : M \longrightarrow M$$
*eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt $f$ genau einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Es sei $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$, ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte
$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$
für alle $x, y \in M$. Wenn $x, y \in M$ Fixpunkte sind, so folgt aus
$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) < c \cdot d(x, y)$$
sofort $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$, es kann also maximal einen Fixpunkt geben. Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch
$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$
rekursiv definierte Folge in $M$. Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung
$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq c^n \cdot d(f(x), x) = c^n a.$$
Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung
$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \ldots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ &\leq a(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c^{m+1} + c^m) \\ &= ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c^2 + c^1 + 1) \\ &\leq c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$
Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man $n_0$ mit $c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses $y$ ein Fixpunkt ist.Die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert $y$ sein muss. □

## Der Satz über die Umkehrabbildung

Der Satz über die (lokale) Umkehrabbildung gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis. Er besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von $P$ und von $\varphi(P)$ eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Wir brauchen einige Vorbereitungen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist schon eine gute Einstimmung für den Beweis des folgenden Hauptsatzes.

LEMMA 49.2. *Es seien $V_1$ und $V_2$ euklidische Vektorräume, $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen und sei*

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2 \subseteq V_2$$

*eine bijektive differenzierbare Abbildung. Sei $P \in U_1$. Das totale Differential*

$$(D\varphi)_P$$

*sei bijektiv und die Umkehrabbildung*

$$\psi : U_2 \longrightarrow U_1$$

*sei stetig in $Q = \varphi(P)$. Dann ist die Umkehrabbildung differenzierbar in $Q$ und für ihre Ableitung gilt*

$$(D\psi)_Q = ((D\varphi)_P)^{-1} .$$

*Beweis.* Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum als auch im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung $D^{-1}$. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1 .$$

Diese ist wieder differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$ nach der Kettenregel. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für $\varphi$, da eine lineare Abbildung differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass $\varphi$ eine differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Nach diesen Reduktionen bedeutet die Differenzierbarkeit von $\varphi$ in 0, dass der Limes

$$\lim_{v \to 0} \frac{\varphi(v) - v}{|| v ||} = 0$$

ist. Wir müssen entsprechend für die Umkehrabbildung $\psi$ die Beziehung

$$\lim_{w \to 0} \frac{\psi(w) - w}{|| w ||} = 0$$

zeigen. Es genügt, dies für jede Folge $w_n \to 0$ nachzuweisen. Eine solche Folge kann man eindeutig schreiben als $w_n = \varphi(v_n)$ (mit $v_n = \psi(w_n)$) und aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von $\psi$ konvergiert auch die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\|\psi(w_n) - w_n\|}{\|w_n\|} &= \frac{\|\psi(\varphi(v_n)) - \varphi(v_n)\|}{\|\varphi(v_n)\|} \\ &= \frac{\|v_n - \varphi(v_n)\|}{\|\varphi(v_n)\|} \\ &= \frac{\|\varphi(v_n) - v_n\|}{\|\varphi(v_n)\|}. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(v) = v + \|v\| \cdot r(v)$ mit $\lim_{v\to 0} r(v) = 0$ gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von 0 derart, dass

$$\|\varphi(v)\| = \|v + \|v\| \cdot r(v)\| \geq \frac{1}{2} \|v\| .$$

Daher lässt sich die obere Gleichungskette (für $n$ hinreichend groß) fortsetzen durch

$$\leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(v_n) - v_n\|}{\|v_n\|} ,$$

und dies konvergiert gegen 0. □

Im allgemeinen ist eine differenzierbare Abbildung nicht bijektiv. Man kann das Lemma aber häufig anwenden, indem man zu einer kleineren offenen Umgebung des Punktes $P$ übergeht und für diese die Bijektivität auf das Bild zeigt.

Im Beweis des folgenden Satzes geht auch die folgende Version des Mittelwertsatzes ein.

Lemma 49.3. *Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ sei offen und enthalte mit je zwei Punkten die Verbindungsgerade. Es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

*eine differenzierbare Abbildung und es gelte*

$$\|(D\varphi)_x\| \leq b$$

*für alle $x \in G$. Dann gilt für $P, Q \in G$ die Abschätzung*

$$\|\varphi(Q) - \varphi(P)\| \leq \|Q - P\| \cdot b.$$

*Beweis.* Bei $P = Q$ ist nichts zu zeigen, sei also $P \neq Q$. Wir betrachten die Abbildung

$$h : [0, \|Q - P\|] \longrightarrow W,\ t \longmapsto \varphi(P + t\frac{Q - P}{\|Q - P\|}).$$

Da nach Voraussetzung $P + t\frac{Q-P}{||Q-P||} \in G$ ist, ist dies eine differenzierbare Kurve. Daher gibt es nach der Mittelwertabschätzung für Kurven ein $c \in [0, ||Q-P||]$ mit

$$\begin{aligned} ||\varphi(P) - \varphi(Q)|| &\leq ||Q-P|| \cdot ||h'(c)|| \\ &= ||Q-P|| \cdot ||(D\varphi)_{P+c\frac{Q-P}{||Q-P||}}(\frac{Q-P}{||Q-P||})|| \\ &= ||Q-P|| \cdot ||(D\varphi)_{P+c\frac{Q-P}{||Q-P||}}|| \cdot ||\frac{Q-P}{||Q-P||}|| \\ &\leq ||Q-P|| \cdot ||(D\varphi)_{P+c\frac{Q-P}{||Q-P||}}|| \\ &\leq ||Q-P|| \cdot b. \end{aligned}$$

$\square$

Der folgende Satz besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung in einer geeigneten offenen Umgebung eines Punktes bijektiv ist, wenn die Ableitung in diesem Punkt bijektiv ist. D.h., dass sich die Abbildung lokal so verhält wie die lineare Approximation.

Satz 49.4. *Es seien $V_1$ und $V_2$ euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow V_2$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential*

$$(D\varphi)_P$$

*bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in V_2$ derart, dass $\varphi$ eine Bijektion*

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

*induziert, und dass die Umkehrabbildung*

$$(\varphi|_{U_1})^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

*ebenfalls stetig differenzierbar ist.*

*Beweis.* Wir beginnen mit einigen Reduktionen.Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum als auch im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung $D^{-1}$. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1 .$$

Diese ist wieder stetig differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für $\varphi$, da eine lineare Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass $\varphi : V_1 \to V_1 = V_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Wir werden dennoch von $V_1$ und $V_2$ sprechen, um klar zu machen, ob sich etwas im Definitionsraum oder im Zielraum abspielt. Sei $y \in V_2$ fixiert. Wir betrachten die Hilfsabbildung

$$H_y : G \longrightarrow V_2,\ x \longmapsto H_y(x) = x - \varphi(x) + y.$$

Diese Hilfabbildung erfüllt folgende Eigenschaft: Ein Punkt $x \in G$ ist genau dann ein Fixpunkt von $H_y$, also ein Punkt mit $H_y(x) = x - \varphi(x) + y = x$, wenn $\varphi(x) = y$ ist, d.h. wenn $x$ ein Urbild von $y$ unter $\varphi$ ist. Die Abbildungen $H_y$ sind selbst stetig differenzierbar und es gilt

$$(DH_y)_x = \operatorname{Id} - (D\varphi)_x \,.$$

Wir möchten den Banachschen Fixpunktsatz auf $H_y$ anwenden, um dafür einen Fixpunkt zu gewinnen und diesen als Urbildpunkt von $y$ unter $\varphi$ nehmen zu können.Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto (D\varphi)_x$ und wegen $(D\varphi)_0 = \operatorname{Id}$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, derart, dass für alle $x \in B(0, r)$ die Abschätzung

$$||\,(DH_y)_x\,|| = ||\operatorname{Id} - (D\varphi)_x\,|| \le \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes $x \in B(0, r)$ gilt daher nach der Mittelwertabschätzung die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||\,x - \varphi(x)\,|| &= ||\,H_0(x)\,|| \\ &= ||\,H_0(x) - H_0(0)\,|| \\ &\le \frac{1}{2}\,||\,x\,|| \,. \end{aligned}$$

Für $y \in B(0, \frac{r}{2})$ und $x \in B(0, r)$ gilt

$$\begin{aligned} ||\,H_y(x)\,|| &= ||\,x - \varphi(x) + y\,|| \\ &\le ||\,x - \varphi(x)\,|| + ||\,y\,|| \\ &\le \frac{||\,x\,||}{2} + \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in B(0, \frac{r}{2})$ liegt also eine Abbildung

$$H_y : B(0, r) \longrightarrow B(0, r)$$

vor. Wegen der oben formulierten Ableitungseigenschaft und aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt für zwei Punkte $x_1, x_2 \in B(0, r)$ die Abschätzung

$$||\,H_y(x_1) - H_y(x_2)\,|| \le \frac{1}{2}\,||\,x_1 - x_2\,||,$$

so dass $H_y$ eine stark kontrahierende Abbildung ist. Da ein euklidischer Vektorraum und damit auch die abgeschlossene Kugel $B(0, r)$ vollständig sind, besitzt jede Abbildung $H_y$ aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes genau einen Fixpunkt aus $B(0, \frac{r}{2})$, den wir mit $\psi(y)$ bezeichnen. Aufgrund der eingangs gemachten Überlegung ist $\varphi(\psi(y)) = y$. Zu $y \in U(0, \frac{r}{2})$ gehört das eindeutige Urbild $x \in B(0, r)$ zur offenen Kugel $U(0, r)$, wie die obige

Abschätzung zeigt. Wir setzen $U_2 = U(0, \frac{r}{2})$ und $U_1 = \varphi^{-1}(U_2) \cap U(0, r)$, wobei $U_1$ aufgrund der Stetigkeit von $\varphi$ offen ist. Die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2,\ x \longmapsto \varphi(x)$$

ist wieder stetig und bijektiv. Insbesondere gibt es (lokal) eine Umkehrabbildung

$$\psi : U_2 \longrightarrow U_1,$$

die wir als stetig differenzierbar nachweisen müssen. Wir zeigen zuerst, dass $\psi$ Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitz-Konstanten 2. Seien $y_1, y_2 \in U_2$ gegeben mit den eindeutigen Elementen $x_1, x_2 \in U_1$ mit $\varphi(x_1) = y_1$ und $\varphi(x_2) = y_2$. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} || x_2 - x_1 || &= || H_0(x_2) + \varphi(x_2) - H_0(x_1) - \varphi(x_1) || \\ &\leq || H_0(x_2) - H_0(x_1) || + || \varphi(x_2) - \varphi(x_1) || \\ &\leq \frac{1}{2} \, || x_2 - x_1 || + || \varphi(x_2) - \varphi(x_1) ||, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung auf obiger Überlegung beruht. Durch Umstellung ergibt sich

$$|| \psi(y_2) - \psi(y_1) || = || x_2 - x_1 || \leq 2 \, || y_2 - y_1 || \, .$$

Aufgrund von Lemma 49.2 ist $\psi$ auch differenzierbar und es gilt die Formel

$$(D\psi)_y = ((D\varphi)_{\psi(y)})^{-1} \, .$$

Aus dieser Darstellung lässt sich auch die stetige Abhängigkeit der Ableitung von $y$ ablesen, da $\psi$ stetig ist, da das totale Differential von $\varphi$ nach Voraussetzung stetig von $x = \psi(y)$ abhängt und da das Bilden der Umkehrmatrix ebenfalls stetig ist. $\square$