Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 47

Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen[1]

Satz 47.1. *Sei $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -,-\rangle$ bzgl. dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leq i,j\leq k}$$

seien alle von 0 verschieden für $k=1,\ldots,n$. Es sei q die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1 = \det M_1,\ D_2 = \det M_2, \ldots, D_n = \det M_n = \det G\,.$$

Dann ist $\langle -,-\rangle$ vom Typ $(n-q,q)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form $(n-b,b)$. Wir müssen zeigen, dass $b=q$ ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von V, wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension $n-1$ bewiesen und es liege ein n-dimensionaler Raum mit einer Basis $v_1,\ldots,v_n$ mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Unterraum

$$U = \langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle$$

hat die Dimension $n-1$ und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form $\langle -,-\rangle|_U$ stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n \ = \ \det M_n \ = \ \det G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\langle -,-\rangle|_U$ den Typ $(n-1-a,a)$, wobei a die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1,\ldots,D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$a \ \leq \ b \ \leq \ a+1,$$

da ein b-dimensionaler Unterraum $W\subseteq V$, auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Unterraum $W' = U\cap W\subseteq U$ führt, der die Dimension

[1] Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

b oder $b-1$ besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 47.2 ist das Vorzeichen von D_{n-1} gleich $(-1)^a$ und das Vorzeichen von D_n gleich $(-1)^b$. Das bedeutet, dass zwischen D_{n-1} und D_n ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel genau dann vorliegt, wenn

$$b = a+1$$

ist. $\square$

KOROLLAR 47.2. *Sei $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -,-\rangle$ bzgl. dieser Basis und es seien D_k die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leq i,j\leq k},\ k=1,\ldots,n\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Genau dann ist $\langle -,-\rangle$ positiv definit, wenn alle D_k positiv sind.*
(2) *Genau dann ist $\langle -,-\rangle$ negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge $D_0=1,\ D_1,\ D_2,\ldots,D_n$ an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 47.2 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich $(-1)^0 = 1$, also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume $U_i = \langle v_1,\ldots,v_i\rangle$ ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 47.1, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also $-\langle -,-\rangle$, betrachtet. $\square$

Die Taylor-Formel - Vorbereitungen

Ein Polynom in n Variablen,

$$\begin{aligned} & f(x_1,\ldots,x_n) \\ = & \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n} \end{aligned}$$

(wobei die Summe endlich ist) lässt sich entlang des Grades des Eponententupels, also

$$\mid r \mid = \mid (r_1,\ldots,r_n) \mid = \sum_{j=1}^n r_j$$

anordnen, also

$$\begin{aligned} & f(x_1,\ldots,x_n) \\ = & \sum_{d=0}^{e} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n,\, |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n} \right). \end{aligned}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ kann man dies auch schreiben als

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; T_k(x_1, \ldots, x_n) + R_k(x_1, \ldots, x_n)$$

mit ($x = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$T_k(x) = \sum_{d=0}^{k} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n,\, |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right)$$

und

$$R_k(x) = \sum_{d=k+1}^{e} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n,\, |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right) .$$

Für R_k gilt dabei

$$\lim_{x\to 0} \frac{||\, R_k(x)\, ||}{||\, x\, ||^k} = 0 \, .$$

Bei $k = 1$ ist

$$T_1(x) = a_{(0,\ldots,0)} + a_{(1,0,\ldots,0)} x_1 + \ldots + a_{(0,\ldots,0,1)} x_n$$

die lineare Approximation von f im Punkt $0 = (0, \ldots, 0)$, und dabei gilt für die Abweichung in der linearen Approximation die Beziehung $r(x) = \frac{R_1(x)}{||x||}$. Im Allgemeinen liefern die Polynome $T_k(x)$ bessere Approximationen im Nullpunkt als die lineare Approxmation, und mit $R_k(x)$ kann man die Abweichung kontrollieren. Entscheidend für uns ist, dass man nicht nur für Polynomfunktionen, sondern generell für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f approximierende Polynome finden und die Abweichung gut kontrollieren kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Formel für Funktionen in mehreren Variablen.*

Zu einem Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und einem Tupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ aus natürlichen Zahlen setzt man

$$x^r = x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \, .$$

Entsprechend schreibt man für eine Polynomfunktion abkürzend

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \;=\; \sum_{r\in\mathbb{N}^n} a_r x^r .$$

Die gleiche Abkürzungsphilosophie übernimmt man für Richtungsableitungen. Wenn V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, so setzt man $D_i = D_{v_i}$, und für $r = (r_1, \ldots, r_n)$ setzt man

$$D^r = D_1^{r_1} \circ D_2^{r_2} \circ \cdots \circ D_n^{r_n} \, .$$

Man beachte, dass man aufgrund des Satzes von Schwarz unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sämtliche Reihenfolgen von Richtungsableitungen in dieser Weise ausdrücken kann. Des weiteren definieren wir für ein Tupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ die *Fakultät* durch

$$r! := r_1! \cdots r_n!$$

Bevor wir die Taylor-Formel beweisen, die das lokale Verhalten einer Funktion in einer „kleinen“ offenen Ballumgebung eines Punktes beschreibt, wenden wir uns dem lokalen Verhalten in dem Punkt längs einer fixierten Richtung zu, wofür wir die Taylor-Formel in einer Variablen zur Verfügung haben. Zu einer Funktion ($G \subseteq V$, V euklidischer Vektorraum)

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Differenzierbarkeit im Punkt $P \in G$ in Richtung $v \in V$ äquivalent zur Differenzierbarkeit der Funktion

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

für $t = 0$, wobei I ein geeignetes reelles Intervall ist. Wir werden zunächst zeigen, dass eine entsprechende Beziehung auch für höhere Ableitungen gilt.

Satz 47.3. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei I ein offenes Intervall um 0 sei mit $P + tv \in G$ für alle $t \in I$. Dann ist h ebenfalls k-mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$h^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|r|=k} \frac{k!}{r!} D^r f(P + tv) \cdot v^r$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion, dass

$$h^{(k)}(t) \;=\; \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

gilt. Hier wird also über jede Richtungsreihenfolge der Länge k aufsummiert, später werden wir unter Verwendung des Satzes von Schwarz gleiche Summanden zusammenfassen. Für $k = 1$ ist

$$\begin{aligned} h'(t) &= (D_v f)(P + tv) \\ &= (Df)_{P+tv}(v) \\ &= (Df)_{P+tv}\Big(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (Df)_{P+tv}(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f(P + tv). \end{aligned}$$

Der Induktionsschluss ergibt sich aus

$$\begin{aligned} h^{(k+1)}(t) &= (h^{(k)})'(t) \\ &= \Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(P+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k}\Big)'(t) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(P+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k}\Big)v_j \\ &= \sum_{j=1}^n\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_j D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(P+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k} v_j\Big) \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k,j)\in\{1,\ldots,n\}^{k+1}} D_j D_{i_k}\cdots D_{i_1} f(P+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k} v_j . \end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz kommt es nicht auf die Reihenfolge der Richtungableitungen an, d.h. zwei Summanden in der obigen Summe stimmen überein, wenn darin die jeweiligen Richtungsableitungen gleichhäufig vorkommen. Die Anzahl der Tupel $(i_1,\ldots,i_k)$ in $\{1,\ldots,n\}^k$, bei denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, wird durch die Polynomialkoeffizienten

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1!\cdots r_n!}$$

beschrieben.Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Definition 47.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-mal stetig-differenzierbare Funktion und $P \in G$. Dann heißt

$$\sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\,|r|\leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P)\cdot v^r$$

das *Taylor-Polynom vom Grad* $\leq k$ zu f in P.

Satz 47.5. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Strecke von P nach $P+v$ ganz in G liegt. Dann gibt es ein $c \in [0,1]$ mit

$$f(P+v) = \sum_{|r|\leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P)\cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv)\cdot v^r .$$

Beweis. Die Funktion

$$h :]-\delta, 1+\delta[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P+tv),$$

(mit einem geeigneten $\delta > 0$) ist nach Satz 47.3 $(k+1)$-mal differenzierbar. Aufgrund der Taylor-Formel für eine Variable gibt es ein $c \in [0,1]$[2] mit

$$h(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}.$$

Wir drücken die einzelnen Summanden mit Hilfe von Satz 47.3 aus und erhalten

$$\begin{aligned} f(P+v) &= h(1) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r. \end{aligned}$$

$\square$

[2]Der Beweis der Taylor-Formel für eine Variable zeigt, dass c zwischen den beiden beteiligten Punkten gewählt werden kann.