Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 41

Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven

Satz 41.1. *Es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto f(t),$$

eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ *mit*

$$||\, f(b) - f(a)\, || \leq\ (b - a) \cdot\ ||\, f'(c)\, ||\ .$$

Beweis. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also $f(a) \neq f(b)$. Dann ist $u_1 = \frac{f(b)-f(a)}{||f(b)-f(a)||}$ nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von V. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ die Komponentenfunktionen von f bzgl. dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion f_1 an. Es ergibt sich, dass ein $c \in I$ existiert mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a)\ =\ (b - a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|\, f_1(b) - f_1(a)\, | = |\, b - a\, | \cdot |\, f_1'(c)\, |\ .$$

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned} ||\, f(b) - f(a)\, || &= ||\, (f_1(b) - f_1(a))u_1\, || \\ &= |\, f_1(b) - f_1(a)\, | \\ &= |\, b - a\, | \cdot |\, f_1'(c)\, | \\ &\leq |\, b - a\, | \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \cdot (f_i'(c))^2} \\ &= |\, b - a\, | \cdot ||\, f'(c)\, ||\ . \end{aligned}$$

□

Beispiel 41.2. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des *Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t\, , \sin t\,).$$

Diese Abbildung ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t\, , \cos t\,)\, .$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$f'(t)\ =\ \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ =\ 1.$$

Wählen wir das Intervall $[0, 2\pi]$, so ist

$$f(0) = (0,0) = f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass im Mittelwertsatz nicht Gleichheit gelten kann.

Länge von Kurven

Wir arbeiten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

Definition 41.3. Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$\sum_{i=1}^{k} d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs* $[P_0, P_1, \ldots, P_k]$.

Definition 41.4. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \ldots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug.*

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte $P_i = f(t_i)$ als die zugehörigen Orte der durch f beschriebenen Bewegung im $\mathbb{R}^n$.

Definition 41.5. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup\left(L(f(t_0), \ldots, f(t_k)), a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung}, \, k \in \mathbb{N}\right)$$

die *Kurvenlänge* von f. Wenn $L(f)$ endlich ist, so heißt die Kurve f *rektifizierbar.*

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich bspw. ein Fahrzeug in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihren Betrag, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über den Betrag der Geschwindigkeit.

Satz 41.6. *Es sei* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall und*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung, die stetig differenzierbar sei. Dann ist f *rektifizierbar und es gilt für die Kurvenlänge*

$$L(f) = \int_a^b \, || \, f'(t) \, || \; dt \, .$$

Beweis. Da die Norm stetig ist, existiert nach Satz 32.3 das rechte Integral, und zwar ist es gleich dem Infimum über alle Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen der Funktion $t \mapsto || \, f'(t) \, ||$. Diese Treppenintegrale werden zu einer Unterteilung $a = t_0 \leq \ldots \leq t_k = b$ durch $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) w_i$ mit $w_i = \sup \left(|| \, f'(t) \, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i \right)$ gegeben. Andererseits steht nach der Definition der Kurvenlänge links das Supremum über die zu einer solchen Unterteilung gehörigen Summen

$$\sum_{i=1}^k || \, f(t_i) - f(t_{i-1}) \, || \; .$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes gilt

$$|| \, f(t_i) - f(t_{i-1}) \, || \leq \; (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup \left(|| \, f'(t) \, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i \right).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich daher die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k || \, f(t_i) - f(t_{i-1}) \, || \leq \; \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup \left(|| \, f'(t) \, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i \right).$$

Hierbei müssen wir links das Supremum und rechts das Infimum über alle Unterteilungen nehmen. Nehmen wir an, dass das Supremum u der rechten Seite größer als das Infimum v der rechten Seite ist. Dann gibt es eine Unterteilung derart, dass die Längensumme links zu dieser Unterteilung mindestens gleich $u - \frac{1}{3}(u - v)$, und eine Unterteilung derart, dass das Treppenintegral rechts höchstens gleich $v + \frac{1}{3}(u - v)$ ist. Wir können zur gemeinsamen Verfeinerung übergehen und annehmen, dass es sich um die gleiche Unterteilung handelt, und erhalten einen Widerspruch. Das Supremum der linken Seite ist also durch das Infimum der rechten Seite beschränkt. D.h. die Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(f) \leq \int_a^b ||\, f'(t)\, || \; dt \leq (b-a) \cdot \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t \in [a,b]).$$

Diese Beziehung gilt auch für jedes beliebige Teilintervall $[s, s'] \subseteq [a, b]$. Es sei $L_a^s(f)$ die Länge der auf $[a, s]$ definierten Kurve. Es genügt dann zu zeigen, dass diese Funktion eine Stammfunktion zu $t \mapsto ||\, f'(t)\, ||$ ist. Für den zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{L_a^{s'}(f) - L_a^s(f)}{s'-s} = \frac{L_s^{s'}(f)}{s'-s}$ in einem Punkt $s \in [a, b]$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{||\, f(s') - f(s)\, ||}{s'-s} &\leq \frac{L_s^{s'}(f)}{s'-s} \\ &\leq \frac{(s'-s) \cdot \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t \in [s, s'])}{s'-s} \\ &= \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t \in [s, s']). \end{aligned}$$

Für $s' \to s$ konvergieren die beiden äußeren Seiten gegen $||\, f'(s)\, ||$, so dass auch der Differenzenquotient dagegen konvergieren muss. □

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen.

Lemma 41.7. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann ist f genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 41.6. □

Beispiel 41.8. Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 41.9. Wenn allerdings f wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k = b$ ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k |\, f(t_i) - f(t_{i-1})\, | = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn f wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 41.6 und aus Korollar 32.7. Wenn f allerdings nicht monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral $\int_a^b |\, f'(t)\, | \; dt$ gibt es keine direkte Berechnung, da dann $f'(t)$ das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

Beispiel 41.9. Die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ bei } x > 0\,, \\ 0 \text{ bei } x = 0\,, \end{cases}$$

ist stetig, aber nicht rektifizierbar. Für jedes $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ist $f(x_n) = \pm x_n$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Für jedes n ist daher $\mid f(x_n) - f(x_{n-1}) \mid \geq 2x_n$. Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$t_0 < x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1\,,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^{k} 2x_n \;=\; 2 \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} \;=\; \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \;\geq\; \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für $k \to \infty$ nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

Korollar 41.10. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von f gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Beweis. Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$ definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist $g'(x) = (1, f'(x))$. Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 41.6 gleich

$$L \;=\; \int_a^b ||\, g'(x)\, ||\; dt \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dt.$$

□

Beispiel 41.11. Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t, t^2)$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 41.10 ist die Länge von 0 nach b gleich

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \;&=\; \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1 + u^2}\, du \\ &=\; \frac{1}{4}(u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arsinh} u\,)|_0^{2b} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}b\sqrt{1+4b^2} + \operatorname{arsinh}(2b)\,.$$

Beispiel 41.12. Wir betrachten die Funktion

$$f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Daher geht es um das Integral von

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist $\arcsin x$. Daher ist

$$L = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\,|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Beispiel 41.13. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto f(t) = (\cos t\,, \sin t\,).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t\,, \cos t\,)\,.$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von a bis b durchlaufenen Teilstückes gleich

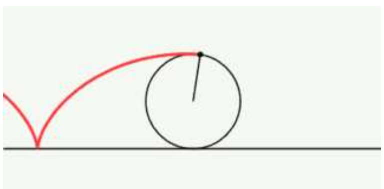
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t\,)^2 + (\cos t\,)^2}\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis 2π genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher 2π.

Beispiel 41.14. Es sei ein Punkt V auf der Peripherie des Einheitskreises fixiert (bspw. ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Einheitskreis sich gleichmäßig auf einer Geraden bewegt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn t den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt V sich zum Zeitpunkt $t=0$ in $(0,0)$ befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$V:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto V(t) = (t-\sin t\,, 1-\cos t\,).$$

beschrieben.



Nach einer Volldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um 2π. Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t\,, \sin t\,)\,.$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 41.6 im Zeitintervall von 0 nach s gleich

$$\begin{aligned}
\int_0^s \sqrt{(1-\cos t\,)^2 + \sin^2 t}\; dt &= \int_0^s \sqrt{2 - 2\cos t}\; dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^s \sqrt{1-\cos t}\; dt \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1-\cos(\pi+2u)}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2u}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 u - \sin^2 u}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 u}\; dt \\
&= 4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \cos u\; dt \\
&= 4(\sin u\,|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}}\,).
\end{aligned}$$

Für $s = 2\pi$ ist dies $4 \cdot 2 = 8$.

Abbildungsverzeichnis