

Mathematik II

Vorlesung 39

Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

DEFINITION 39.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Diese ist offen, wenn I und J offen sind. Eine homogene lineare Differentialgleichung besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt.

SATZ 39.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit zwei stetigen Funktionen

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \text{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ und $H(y_0) = 0$ erfüllen, so ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H streng monoton ist und daher bijektiv. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{1/h(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))} ds = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)} dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 und $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$.

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen muss man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenze wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und \tilde{H} zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und \tilde{G} zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h. die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Die Umkehrfunktion zu $\tilde{H} = (+c) \circ H$ ist $\tilde{H}^{-1} = H^{-1} \circ (-c)$. Daher ergibt sich aus

$$(H^{-1} \circ (-c))(\tilde{G}(t_0)) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t_0)) = H^{-1}(G(t_0))$$

durch Anwenden von H die Gleichheit

$$(-c)(\tilde{G}(t_0)) = \tilde{G}(t_0) - c = G(t_0) + d - c = G(t_0),$$

also muss $d = c$ sein. Daraus ergibt sich, dass die Gleichung

$$y(t) = \tilde{y}(t)$$

für alle t gilt. □

Durch einen Übergang von G nach $G + c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit $G(I') \subseteq H(J)$. Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als

Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

KOROLLAR 39.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1} : J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall¹ $H(J) - c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 39.2. □

KOROLLAR 39.4. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)},$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 39.9. □

BEISPIEL 39.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 39.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y} = y$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 35.11 die Funktion

$$H : J \longrightarrow J' = \mathbb{R}, y \longmapsto H(y) = \ln \left(\tan \frac{y}{2} \right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln \left(\tan \frac{y}{2} \right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2 \arctan(e^u).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2 \arctan(e^{t+c})$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

¹Mit $I+c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I+c = \{x \in \mathbb{R} \mid x-c \in I\}$. Bei $I = [a, b]$ ist also $I+c = [a+c, b+c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}+c = \mathbb{R}$.

BEISPIEL 39.6. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 39.3 $\frac{1}{h(y)} = y$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

BEISPIEL 39.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d.h. die Lösung „entweicht“.

BEISPIEL 39.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

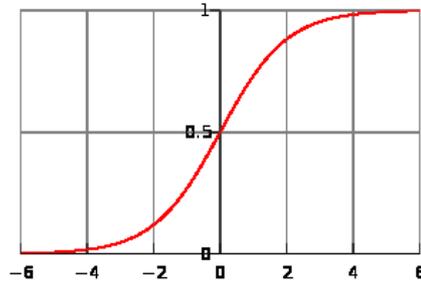
für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf \mathbb{R}_+ definierte Lösung $g(t) = \frac{1}{t}$.



Eine logistische Funktion

BEISPIEL 39.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t . Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t . Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t . Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p . Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich aber natürlich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß des oben formulierten Zusammenhanges gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t)).$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate* $w(p) = a$ liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*. Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p

abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s\left(1 - \frac{1}{g}p\right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right) = sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p} \right) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s} (\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Logistic-curve.svg, Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 5