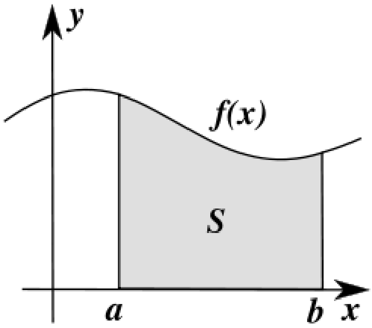
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 31

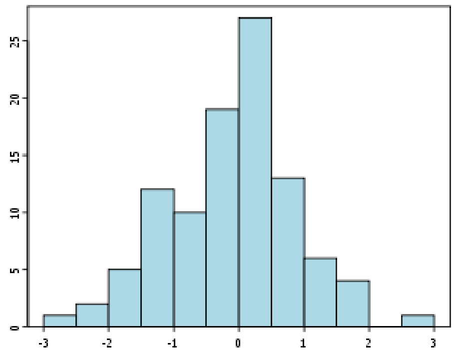


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen*, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, den wir erst im dritten Semester im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandeln werden. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig variieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

Treppenfunktionen



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 31.1. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Die Intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 31.2. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\, dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n} (\sum_{i=1}^n t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bzgl. der eine Treppenfunktion vorliegt.

DEFINITION 31.3. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ ist für alle $x \in I$. Eine Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ ist für alle $x \in I$.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

DEFINITION 31.4. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Obersumme* (oder ein *oberes Treppenintegral*) von f auf I.

DEFINITION 31.5. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Untersumme* (oder ein *unteres Treppenintegral*) von f auf I.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene Obersummen (Untersummen).

DEFINITION 31.6. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

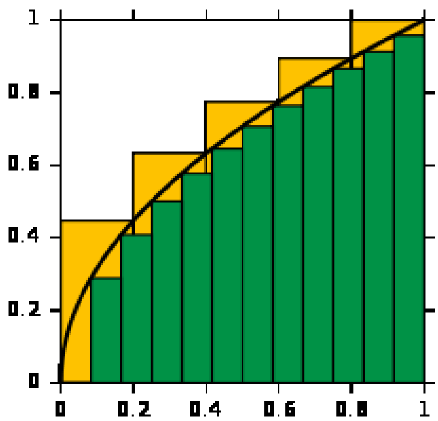
Definition 31.7. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der Untersummen nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der Obersummen ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Maxima (Minima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist. Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

Riemann-integrierbare Funktionen



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 31.8. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Definition 31.9. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer *Riemann-integrierbaren Funktion*

$$f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\,dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bzgl. welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

Lemma 31.10. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.8. □

Beispiel 31.11. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0,1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$[i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}],\ i = 0, \ldots, n-1\,,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(i\frac{1}{n})^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

(siehe Aufgabe 31.7 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n \to \infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}((i+1)\frac{1}{n})^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{n^3}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 31.10 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 31.12. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 31.9. □

Definition 31.13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des oberen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ die beiden Definitionen überein.

Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Satz 31.14. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir können annehmen, dass das Intervall kompakt ist, sagen wir $I = [a, b]$. Die stetige Funktion f ist auf diesem kompakten Intervall beschränkt nach Satz 22.4. Daher gibt es obere und untere Treppenfunktionen und daher existieren Oberintegral und Unterintegral. Wir müssen zeigen, dass sie übereinstimmen. Dazu genügt es, zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ eine untere und eine obere Treppenfunktion für f anzugeben derart, dass die Differenz ihrer Treppenintegrale $\leq \epsilon$ ist. Nach Satz 22.11 ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, x' \in I$ mit $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon'$ gilt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} \leq \delta$ ist, und betrachten wir die Unterteilung des Intervalls mit den Punkten $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Auf den Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ist der Abstand zwischen dem Maximum

$$t_i = \max\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

und dem Minimum

$$s_i = \min\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

kleiner/gleich ϵ'. Die zu diesen Werten gehörigen Treppenfunktionen, also

$$t(x) := \begin{cases} t_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ t_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

und

$$s(x) := \begin{cases} s_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ s_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

sind dann eine obere bzw. untere Treppenfunktion zu f. Die Differenz zwischen den zugehörigen Ober- und Untersummen ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i)\frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon' \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

□

Diese Aussage gilt dann auch für stückweise stetige Funktionen.

Wenn man Aussagen beweist, bei denen auf Unterteilungen eines Intervalls Bezug genommen wird, so ist es häufig sinnvoll, *feinere Unterteilungen* einzuführen. Insbesondere ersetzt man häufig zwei verschiedene Unterteilungen durch eine gemeinsame Verfeinerung.

Lemma 31.15. *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.*
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.*
(3) *Es ist $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.*

(4) *Für* $c \in \mathbb{R}$ *ist* $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.
(5) *Die Funktionen* $\max(f,g)$ *und* $\min(f,g)$ *sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion* $|f|$ *ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt* fg *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Lemma 31.15. (5). Wir betrachten die Aussage für das Maximum. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\delta > 0$ eine obere und eine untere Treppenfunktion gibt derart, dass die Differenz der beiden Treppenintegrale $\leq \delta$ ist. Sei also ein $\delta > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit gibt es Treppenfunktionen

$$s_1 \text{ und } t_1 \text{ mit } s_1 \leq f \leq t_1 \text{ und mit } \int_a^b (t_1 - s_1)x\,dx \leq \delta/2$$

und

$$s_2 \text{ und } t_2 \text{ mit } s_2 \leq g \leq t_2 \text{ und mit } \int_a^b (t_2 - s_2)x\,dx \leq \delta/2\,.$$

Wir können annehmen, dass diesen Treppenfunktionen die gleiche Unterteilung zugrunde liegt. Es sei ℓ_k, $k = 1, \ldots, n$ die Länge des k-ten Teilintervalls I_k und es sei

$$\delta_k = (t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \ell_k\delta_k &= \sum_{k=1}^n \ell_k((t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}) \\
&= \sum_{k=1}^n \ell_k(t_1 - s_1)|_{I_k} + \sum_{k=1}^n \ell_k(t_2 - s_2)|_{I_k} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$s = \max(s_1, s_2) \text{ und } t = \max(t_1, t_2)\,.$$

Dies ist offenbar eine obere bzw. untere Treppenfunktionen für $\max(f,g)$. Wir betrachten ein Teilintervall I_k dieser Unterteilung. Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_1 \leq t_2$$

gilt, so ist

$$t - s \,=\, t_2 - s_2 \,\leq\, \delta_k.$$

Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_2 \leq t_1$$

gilt, so ist ebenfalls

$$t - s \,=\, t_1 - s_2 \,\leq\, t_1 - s_1 \,\leq\, \delta_k.$$

Dies gilt auch in den beiden anderen Fällen. Damit ist die Differenz der Treppenintegrale $\leq \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_k \leq \delta$. (6) folgt direkt aus (5). Für (7) siehe Lemma 31.15. $\square$

Abbildungsverzeichnis