Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 54

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 54.1. Es seien L und M metrische Räume und es seien

$$f, g : L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L \mid f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

Aufgabe 54.2. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\text{Abb}\,(M \times N, L) \text{ und } \text{Abb}\,(M, \text{Abb}\,(N, L))\,.$$

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für Vektorfelder?

Aufgabe 54.3. Sei

$$I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi : I \longrightarrow U,\ t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist, wenn $f(t, c) = 0$ ist für alle $t \in I$.

Aufgabe 54.4. Es sei

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

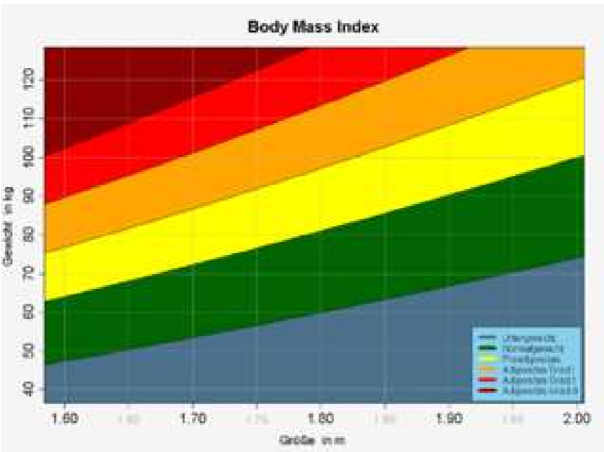
eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

Aufgabe 54.5. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

(1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
(2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
(3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
(4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
(5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
(6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
(7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.



Aufgabe 54.6. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Es sei

$$I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein *Zentralfeld*, d.h. ein Vektorfeld f vom Typ

$$f(t, v) = g(t, v) \cdot v$$

mit einer stetigen Funktion

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, v) \longmapsto g(t, v).$$

Zeige, dass zu einem fixierten $w \in U$ die Lösungen

$$\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

der eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' = h(t, y) := g(t, yw)y \text{ mit } \alpha(t_0) = 1$$

zu Lösungen der Differentialgleichung

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w$$

führen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 54.7. (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Aufgabe 54.8. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$f : U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v : J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

Aufgabe 54.9. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

AUFGABE 54.10. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblem für das Zentralfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, v, w) \longmapsto (t^3 - t)(v, w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2, 3)$.

AUFGABE 54.11. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblem für das Zentralfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, v, w) \longmapsto (t^2 v)(v, w) = (t^2 v^2, t^2 vw),$$

mit $\varphi(0) = (5, -1)$.

AUFGABE 54.12. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung drittter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''\,.$$

mit einem polynomialen Ansatz für $y(t)$.

Abbildungsverzeichnis