Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 43

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 43.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y).$$

Aufgabe 43.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2yz^3 - \sin x\,, \exp(x^4y) - 2x^2z^3 \cos(xy^2z)\,).$$

Aufgabe 43.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 |\,,\ y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 43.4. Bestimme sämtliche höhere Richtungsableitungen der Abbildung
$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$
die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 43.5. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.6. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (\,\sin xy\,, x^2y^3z^4 - y \sinh z\,, xy^2z + 5).$$

Aufgabe 43.7. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x, y) in Richtung $(2, 5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2, 5)$ anwendet.

Aufgabe 43.8. (4 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen null sind.

Aufgabe 43.9. (4 Punkte)

Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\ldots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) \,=\, D_{v_{\sigma(n)}}(\ldots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.