Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 42

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 42.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto xy,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,5)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(4) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(5) im Punkt $(2,3)$ in Richtung $(-1,0)$,
(6) im Punkt $(3,7)$ in Richtung $(5,-4)$.

Aufgabe 42.2. Sei

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{K}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)_P = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 42.3. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und $v \in V$. Es sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass die Richtungsableitung $(D_v \varphi)_P$ im Punkt P genau dann existiert, wenn die Kurve

$$I \longrightarrow W,\ t \longmapsto \varphi(P + tv),$$

in $t = 0$ differenzierbar ist. Wie muss dabei das Intervall I gewählt werden?

Aufgabe 42.4. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 42.5. Es seien V und W reelle endlichdimensionale Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und $v \in V$ ein Vektor. Es bezeichne $C_v^1(G, W)$ die Menge aller in Richtung v differenzierbaren Abbildungen von G nach W. Zeige, dass die Abbildung

$$C_v^1(G, W) \longrightarrow \mathrm{Abb}(G, W),\ \varphi \longmapsto (D\varphi)_v,$$

linear ist.

Aufgabe 42.6. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgabe 42.7. Zeige, dass eine polynomiale Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

stetig ist.

Aufgabe 42.8. Es sei

$$f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 42.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.10. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

(1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
(2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
(3) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 0)$,

(4) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,-3)$,
(5) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,1)$,
(6) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(-1,\frac{1}{2})$,
(7) im Punkt $(5,7)$ in Richtung $(1,0)$,
(8) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(5,7)$.

Aufgabe 42.11. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Aufgabe 42.12. (3 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 42.11, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{K}^n$ die Richtungsableitung $D_v\varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

Aufgabe 42.13. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert. Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$(f \circ \varphi)'(t) = (D_{\varphi'(t)} f)_{\varphi(t)}$$

gilt.

Aufgabe 42.14. (5 Punkte)

Seien D, E, F metrische Räume und sei

$$h : D \longrightarrow E$$

eine stetige Abbildung. Es sei $P \in D$ ein Berührpunkt von $D \setminus \{P\}$ und $h(P) = Q \in E$ ein Berührpunkt von $E \setminus \{Q\}$. Es sei

$$g : D \setminus \{Q\} \longrightarrow F$$

eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \to Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \to P} g(h(x))$$

existiert und mit $\lim_{y \to Q} g(y)$ übereinstimmt.