Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 40

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 40.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto f(t) = (t^2 - \sin t\,, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2+1}),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 40.2. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

(1) $t \mapsto (t^2, t^2)$,
(2) $t \mapsto (t^2, -t^2)$,
(3) $t \mapsto (t^2, t)$,
(4) $t \mapsto (2t, 3t)$,
(5) $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 40.3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in W$. Zeige, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow V,\ t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 40.4. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g : I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)\,.$$

(2) Das Produkt

$$hf : I \longrightarrow V,\, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h} : I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$(\frac{f}{h})'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Die folgenden Aufgaben wiederholen wichige Eigenschaften von euklidischen Vektorräumen.

Aufgabe 40.5. Man beweise das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren*. Das besagt, dass man in einem euklidischen Vektorraum aus einer gegebenen Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ basteln kann derart, dass die erzeugten Unterräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle$$

übereinstimmen für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 40.6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v + w ||^2 + || v - w ||^2 = 2\, || v ||^2 + 2\, || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 40.7. Es seien $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$ zwei euklidische Vektorräume. Zeige, dass durch

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt auf dem Produktraum $V_1 \times V_2$ definiert wird.

AUFGABE 40.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

bzgl. einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

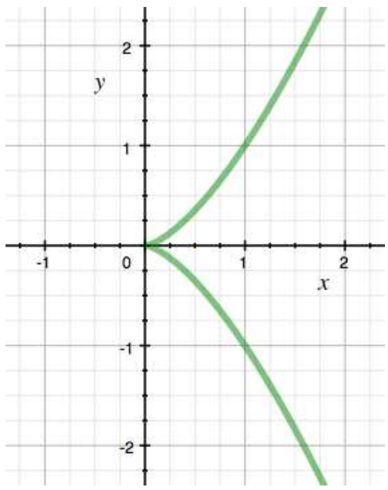
$$\lim_{x \to a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \to a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgaben zum Abgeben



AUFGABE 40.9. (3 Punkte)

Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

AUFGABE 40.10. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Aufgabe 40.11. (3 Punkte)

Für welche Punkte $t \in \mathbb{R}$ ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \longmapsto (2 \sin t \, , 3 \cos t \,),$$

zum Nullpunkt $(0, 0)$ maximal, für welche minimal?

Aufgabe 40.12. (4 Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x \, , \sin (x^2) \,).$$

a) Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x.

b) Bestimme die Komponentenfunktionen von f bzgl. der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von $\mathbb{R}^3$.

c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 40.8.

Aufgabe 40.13. (4 Punkte)

Sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und sei $I =] - 1, 1[$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{f : I \to \mathbb{R}^n | \, f \text{ differenzierbar}, \, f(0) = P\} \, .$$

Wir nennen zwei Kurven $f, g \in M$ *tangential äquivalent*, wenn $f'(0) = g'(0)$ ist.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde den einfachsten Vertreter für die Äquivalenzklassen.

c) Man gebe für jede Klasse einen weiteren Vertreter an.

d) Beschreibe die Menge der Äquivalenzklassen (also die Quotientenmenge).

Abbildungsverzeichnis