

Mathematik II**Arbeitsblatt 38****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 38.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}.$$

AUFGABE 38.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}.$$

AUFGABE 38.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y.$$

AUFGABE 38.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7.$$

AUFGABE 38.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

AUFGABE 38.6. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0 . Zeige unter Verwendung von Wiederholertutorium, Aufgabe 2.3, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

AUFGABE 38.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 38.8. (2 Punkte)

Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 38.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

AUFGABE 38.9. (2 Punkte)

Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

AUFGABE 38.10. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}.$$

AUFGABE 38.11. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2 + 2}y \text{ mit } y(3) = 7.$$

AUFGABE 38.12. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1.$$

AUFGABE 38.13. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}.$$