Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 36

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 36.1. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_{-1}^{2} at^2 - a^2 t \, dt$$

ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 36.2. Nach neuesten Studien zur Aufnahmefähigkeit von durchschnittlichen Studierenden wird die Aufmerksamkeitskurve am Tag durch

$$[8, 18] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = -x^2 + 25x - 100,$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden und $y = f(x)$ ist die Aufnahmefähigkeit in Mikrocreditpoints pro Sekunde. Wann muss man eine ein einhalb stündige Vorlesung ansetzen, damit die Gesamtaufnahme optimal ist? Wieviele Mikrocreditpoints werden dann in dieser Vorlesung aufgenommen?

Aufgabe 36.3. Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \, x \longmapsto x^n .$$

Berechne die Grenzfunktion, deren Integral (wenn es existiert), die Integrale $\int_0^1 f_n(t)\, dt$ und deren Grenzwert für $n \to \infty$.

Aufgabe 36.4. Sei I ein Intervall, r ein Randpunkt von I und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 36.5. Sei $I =]r, s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r, s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\, dt$$

existiert.

Aufgabe 36.6. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale.

Aufgabe 36.7. Diskutiere die Aufgaben 31.17 und 31.18 auf der Grundlage des Vergleichskriteriums.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.8. (4 Punkte)

Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$$

auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion.

Bestimme ferner

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 (x^2 + 1) f_n(x) dx\, .$$

Aufgabe 36.9. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von stetigen Funktionen

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, wo aber $\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 36.10. (8 Punkte)

Man betrachte die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} -x \ln(x) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Zeige, dass f stetig ist und dass $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

b) Man zeige, dass die Funktionenfolge

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$$

auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert.

c) Beweise

$$\int_0^1 (-x)^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^{n+m} n!}{(m+1)^{n+1}}$$

für alle $m \geq n$.

d) Summiere die Reihe in b) und folgere

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} .$$

Aufgabe 36.11. (5 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 36.12. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\, dt$ existiert.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 36.13. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die die eulersche Konstante als einen Flächeninhalt erkennbar macht.