

Mathematik II**Arbeitsblatt 33****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 33.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx .$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

AUFGABE 33.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x .$$

AUFGABE 33.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x .$$

AUFGABE 33.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} .$$

AUFGABE 33.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4 + 2}} .$$

AUFGABE 33.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} .$$

AUFGABE 33.7. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F . Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$f(t)(bt + c)$$

AUFGABE 33.8. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 33.5.

AUFGABE 33.9. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 33.10. (4 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t) dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{falls } 0 \leq t \leq 2, \\ t^2 - 6t + 11, & \text{falls } 2 < t \leq 5, \\ 6, & \text{falls } 5 < t \leq 6, \\ -2t + 18, & \text{falls } 6 < t \leq 8, \end{cases}$$

gegeben ist.

AUFGABE 33.11. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x .$$

AUFGABE 33.12. (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x .$$

AUFGABE 33.13. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1 + 3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}} .$$

AUFGABE 33.14. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x) .$$

AUFGABE 33.15. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1 + \sin x)) \cdot \sin x .$$

AUFGABE 33.16. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} .$$

AUFGABE 33.17. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F . Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G . Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$f(t)(at^2 + bt + c)$$

AUFGABE 33.18. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

b) Sei nun φ zusätzlich differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s) ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

AUFGABE 33.19. (5 Punkte)

Sei

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

AUFGABE 33.20. (3 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zu einer stetig differenzierbaren Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

heißt die Funktion

$$\frac{f'}{f}$$

die *logarithmische Ableitung* von f . Zeige, dass die logarithmische Ableitung einen Gruppenhomomorphismus

$$(C^1(I, \mathbb{R}_+), \cdot) \longrightarrow (C^0(I, \mathbb{R}), +)$$

definiert.

Aufgaben zum Hochladen

Wie im letzten Semester wird es auch in diesem Semester vereinzelt Aufgaben geben, bei denen graphisches Illustrationsmaterial angefertigt werden soll, das das Skript bzw. die Kursseite verschönern soll. Die zu erzielenden Punkte werden am Ende des Semesters gut geschrieben.

AUFGABE 33.21. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die den Mittelwertsatz der Integralrechnung illustriert (mit flächengleichem Rechteck und Durchschnittshöhe).

AUFGABE 33.22. (8 Punkte)

Man schreibe eine Computeranimation, die den Beweis des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung illustriert (mit flächengleichen Rechtecken zu den bestimmten Integralen zur Intervalllänge h).

AUFGABE 33.23. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die den geometrischen Hintergrund zur Berechnung der Stammfunktion einer Umkehrfunktion illustriert.