

Mathematik II**Arbeitsblatt 32****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 32.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} dx.$$

AUFGABE 32.2. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t} dt.$$

AUFGABE 32.3. Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$$

differenzierbar ist und bestimme die Ableitung davon.

AUFGABE 32.4. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t) dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 32.5. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe von Elementen aus dem Intervall $[0, 1]$ und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$

absolut konvergent ist.

AUFGABE 32.6. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

AUFGABE 32.7. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

AUFGABE 32.8. Seien

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Beweise, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = g(x)$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 32.9. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a, b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(s) \int_a^b g(t) dt$$

AUFGABE 32.10. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π .

AUFGABE 32.11. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x + 1} dx.$$

AUFGABE 32.12. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}.$$

AUFGABE 32.13. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

AUFGABE 32.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

AUFGABE 32.15. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

AUFGABE 32.16. (3 Punkte)

Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

AUFGABE 32.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass es keine (endliche) Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{]a_{i-1}, a_i]}$ stetig sind.

AUFGABE 32.18. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n + 1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)