Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 31

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 31.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3,+4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t)=\begin{cases}5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,,\\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,,\\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,,\\ 13, \text{ falls } t=-\frac{1}{2}\,,\\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,,\\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,,\\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,,\end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 31.2. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.3. Es seien

$$f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f+g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f,g)$,
(4) $\min(f,g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 31.4. Es sei

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion und

$$g:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.5. Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.6. Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.7. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Aufgabe 31.8. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 31.9. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Aufgabe 31.10. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c \int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 31.11. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$| \int_a^b f(t)\, dt | \leq \int_a^b | f(t) | \ dt$$

gilt.

Aufgabe 31.12. Bringe die Begriffe *Steuersatz* und *Grenzsteuersatz* mit Treppenfunktionen und Treppenintegralen in Verbindung.

Zu versteuerndes Einkommen	2009			2010		
	Steuerbetrag	Steuersatz	Grenzsteuersatz	Steuerbetrag	Steuersatz	Grenzsteuersatz
8.000 €	23 €	0,3%	14,7%	- €	0,0%	0,2%
8.500 €	97 €	1,1%	15,3%	71 €	0,8%	14,3%
9.000 €	176 €	2,0%	16,2%	148 €	1,6%	15,8%
9.500 €	258 €	2,7%	17,1%	229 €	2,4%	16,7%
10.000 €	347 €	3,5%	18,1%	315 €	3,2%	17,6%
10.500 €	440 €	4,2%	19,0%	406 €	3,9%	18,6%
11.000 €	537 €	4,9%	20,0%	501 €	4,6%	19,5%
11.500 €	639 €	5,6%	20,9%	600 €	5,2%	20,4%
12.000 €	745 €	6,2%	21,8%	705 €	5,9%	21,3%
12.500 €	857 €	6,9%	22,8%	813 €	6,5%	22,2%
13.000 €	974 €	7,5%	23,7%	927 €	7,1%	23,1%
14.000 €	1.215 €	8,7%	24,4%	1.165 €	8,3%	24,2%
15.000 €	1.462 €	9,7%	24,8%	1.410 €	9,4%	24,7%
16.000 €	1.711 €	10,7%	25,3%	1.669 €	10,4%	25,1%
17.000 €	1.966 €	11,6%	25,7%	1.912 €	11,2%	25,6%
18.000 €	2.225 €	12,4%	26,2%	2.171 €	12,1%	26,0%
19.000 €	2.490 €	13,1%	26,6%	2.433 €	12,8%	26,5%
20.000 €	2.758 €	13,8%	27,1%	2.701 €	13,5%	27,0%
21.000 €	3.032 €	14,4%	27,6%	2.972 €	14,2%	27,4%
22.000 €	3.308 €	15,0%	28,0%	3.249 €	14,8%	27,9%
23.000 €	3.590 €	15,6%	28,5%	3.530 €	15,3%	28,3%
24.000 €	3.879 €	16,2%	28,9%	3.815 €	15,9%	28,8%
26.000 €	4.466 €	17,2%	29,8%	4.400 €	16,9%	29,7%
28.000 €	5.072 €	18,1%	30,7%	5.004 €	17,9%	30,6%
30.000 €	5.696 €	19,0%	31,6%	5.625 €	18,8%	31,5%
32.000 €	6.338 €	19,8%	32,6%	6.265 €	19,6%	32,4%
34.000 €	6.998 €	20,6%	33,5%	6.923 €	20,4%	33,4%
36.000 €	7.677 €	21,3%	34,4%	7.599 €	21,1%	34,3%
38.000 €	8.373 €	22,0%	35,3%	8.294 €	21,8%	35,2%
40.000 €	9.088 €	22,7%	36,2%	9.007 €	22,5%	36,1%
42.000 €	9.821 €	23,4%	37,1%	9.738 €	23,2%	37,0%
44.000 €	10.573 €	24,0%	38,0%	10.488 €	23,8%	37,9%
46.000 €	11.343 €	24,7%	38,9%	11.256 €	24,5%	38,9%
48.000 €	12.130 €	25,3%	39,8%	12.042 €	25,1%	39,8%
50.000 €	12.936 €	25,9%	40,8%	12.847 €	25,7%	40,7%
52.000 €	13.761 €	26,5%	41,7%	13.669 €	26,3%	41,6%
54.000 €	14.616 €	27,1%	42,0%	14.509 €	26,9%	42,0%
56.000 €	15.456 €	27,6%	42,0%	15.348 €	27,4%	42,0%
58.000 €	16.296 €	28,1%	42,0%	16.188 €	27,9%	42,0%
60.000 €	17.136 €	28,6%	42,0%	17.028 €	28,4%	42,0%
64.000 €	18.816 €	29,4%	42,0%	18.708 €	29,2%	42,0%
68.000 €	20.496 €	30,1%	42,0%	20.388 €	30,0%	42,0%
72.000 €	22.176 €	30,8%	42,0%	22.068 €	30,7%	42,0%
76.000 €	23.856 €	31,4%	42,0%	23.748 €	31,2%	42,0%
80.000 €	25.536 €	31,9%	42,0%	25.428 €	31,8%	42,0%

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.13. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und einer Treppenfunktion

$$g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.14. (4 Punkte)

Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 31.15. (3 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2 \, dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.16. (5 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^{7} -t^3 + 3t^2 - 2t + 5 \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.17. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 31.18. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Aufgabe 31.19. (8 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|\, s(t) - f(t)\, | \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 31.21. (6 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

Liebe Freunde der Mathematik

Herzlich willkommen zur Vorlesung „Mathematik II“ im Sommersemester 2010. Dieses Blatt enthält die wesentlichen Informationen zu Aufgaben, Übungsbetrieb und Klausur der Vorlesung. Fragen Sie bitte nach, wenn etwas unklar ist.

Arbeitsblätter und Übungsbetrieb

Zu jeder Vorlesung gibt es ein Arbeitsblatt. Es besteht jeweils aus mehreren Übungen bzw. Aufgaben, die das Verständnis des Vorlesungsinhalts vertiefen sollen. Es unterteilt sich in Aufwärmaufgaben und Aufgaben zum Abgeben. Ich empfehle, den Stoff der Vorlesung anhand der Arbeitsblätter sofort und kontinuierlich nachzuarbeiten. Die Blätter sind verhältnismäßig umfangreich; der Umfang orientiert sich daran, in welchem Maße Sie sich mit dem Stoff auseinandersetzen müssen, um ein sehr gutes Verständnis zu erzielen. Bei der Gestaltung der Arbeitsblätter versuche ich grundsätzlich, ein umfangreiches Arbeitsangebot zur Verfügung zu stellen, das unterschiedliche Schwierigkeitsgrade abdeckt. Sie sollten sich dabei auf das für Sie Anspruchsvolle konzentrieren. Dass durch die Übungsaufgaben auch die Teilnahmeberechtigung an der Klausur erworben wird ist wichtig, aber ein Nebenaspekt.

In den Übungen können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, es werden die Aufwärmaufgaben besprochen, Präsenzaufgaben bearbeitet, manchmal Tipps zu den abzugebenden Aufgaben gegeben, alte Aufgaben zurückgegeben und teilweise vorgerechnet. In allen Teilen ist die aktive Mitarbeit der Studierenden wichtig. Sie können auf dem Forum (auf Wikiversity) Wünsche äußern, was in den Übungen besprochen werden soll.

Während der Woche bearbeiten Sie die abzugebenden Aufgaben. Dies dient dem vertieften Verständnis des Stoffes und ist die Voraussetzung, um für die Klausur zugelassen zu werden. Sie können Ihre Aufgaben in festen Gruppen von (bis zu) sechs Personen abgeben. Bei der Bearbeitung werden Sie in den Tutorien unterstützt, das ist eine Art Hausaufgabenbetreuung durch fortgeschrittene Studierende. Der gemeinsame Abgabetermin für die beiden Arbeitsblätter einer Vorlesungswoche ist der Mittwoch der folgenden Woche, und zwar um 10 Uhr vor der Vorlesung in die Kästen in 69/E. Sie werfen die arbeitsgruppenweise erstellten Lösungen in das Fach des für Ihre Gruppe zuständigen Tutors (das wird noch festgelegt und hängt *nicht* damit zusammen, in welches Tutorium Sie gehen). Die Tutoren korrigieren die Aufgaben, und Sie erhalten die korrigierten Aufgaben in Ihrer Übungsgruppe der nächst folgenden Woche zurück (auf den Zettel schreiben Sie also Ihre Namen und Ihre Übungsgruppe). Wenn Sie eine Korrektur überhaupt nicht nachvollziehen können, wenden Sie sich bitte direkt an den Korrekteur.

Es werden keine Musterlösungen ausgeteilt. Eine Auswahl an Lösungen zu einigen Aufgaben werden in den Übungen vorgestellt.

Testklausuren

Es werden zwei Testklausuren unter den Rahmenbedingungen einer echten Klausur geschrieben (12. Mai und 9. Juli). Die dabei erreichte Punktezahl geht doppelt in die Gesamtpunktzahl ein.

Klausurberechtigung

Um für die Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie in den Übungen und in den beiden Testklausuren insgesamt 200 Punkte erreichen. Diese Zahl ergibt sich aus $200 = 14 \cdot 12 + 2 \times 16$, d.h. Sie sollten in einer Testklausur 16 (die doppelt eingeht) Punkte erreichen und pro Woche durchschnittlich mindestens 12 Punkte erreichen (das entspricht etwa der erfolgreichen Bearbeitung von drei mittleren Aufgaben).

Es sind dabei einige Besonderheiten zu beachten, die mit der relativen Vielzahl an Aufgaben zusammenhängen. Pro Woche können maximal 20 Punkte gut geschrieben werden („Deckelregel"). Bei jeder (Teil-)Aufgabe gilt die „Sockelregel", die besagt, dass eine Aufgabe nur dann in die Wertung eingeht, wenn sie zumindest zur Hälfte richtig beantwortet ist. Es muss also ein „substantieller Beitrag" zur Lösung der Aufgabe erkennbar sein. Damit soll verhindert werden, dass in der Hoffnung auf Punkte rudimentäre Beiträge abgegeben werden. Diese Sockelregel gilt auch in der Klausur.

Zusätzlich zu den Aufgaben gibt es noch einige kleinere Möglichkeiten, Punkte zu sammeln. Für die Korrektur eines Fehlers im Skript (auf Wikiversity) gibt es einen halben Punkt (maximal einen pro Woche), für die Korrektur eines mathematischen Fehlers auch mehr. Für die Bereitstellung von schönen Bildern, Animationen o. Ä. können ebenfalls zusätzliche Punkte vergeben werden. Genaueres auf Anfrage. Diese zusätzlichen Punkte werden zum Schluss des Semesters verrechnet. Sie können auch selbst hier eigene Aufgaben verfassen, die Punktezahl bestimmt allerdings der Dozent.

Wenn Sie in einem früheren Semester den Übungsbetrieb zu dieser Veranstaltung besucht und dadurch die Klausurberechtigung erworben haben, so wird dies Berechtigung akzeptiert. Als Nachweis gilt, dass Sie bei der damaligen Klausur teilgenommen haben.

Die Vorlesung findet statt Montag 10-12, in 66 (Reithalle), E34 und Mittwoch, 10-12, in 31/E06.

Die vier Übungsgruppen finden statt

Gruppe 1: Mittwoch 31/E05 12:00-14:00 (Julio Moyano)

Gruppe 2: Donnerstag 31/E05 12:00-14:00 (Jan Uliczka)

Gruppe 3: Donnerstag 31/E05 14:00-16:00 (Axel Stäbler)

Gruppe 4: Freitag 32/107 14:00-16:00 (Holger Brenner)

Die Tutorien finden statt:

Tutorium 1: Montag 31/E05 14:00-16:00 (Daniel Brinkmann, Sebastian Büscher)

Tutorium 2: Montag 31/E06 16:00-18:00 (Vincent Brunsch, Andreas Rechtien)

Testklausuren: 12. Mai und 9. Juli.

Abbildungsverzeichnis