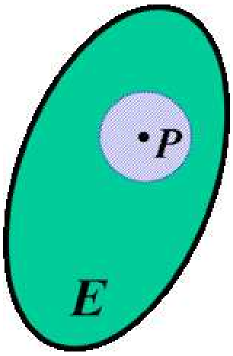
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 89

Partitionen der Eins

Wir besprechen nun eine wichtige analytische Hilfstechnik namens *Partition der Eins*. Wir werden sie im Beweis für die Aussage, dass orientierbare Mannigfaltigkeiten eine positive Volumenform besitzen, und für den Beweis des Satzes von Stokes einsetzen. In dieser Vorlesung werden wir Partitionen der Eins konstruieren, wozu wir zunächst einige topologische Begriffe benötigen.



Das offene Innere ist die Vereinigung aller inneren Punkte, also derjenigen Punkte von T (im Bild E), die mit einer ganzen offenen Umgebung in T enthalten sind.

Definition 89.1. Es sei X ein topologischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$T^o = \bigcup_{U \text{ offen}, U \subseteq T} U$$

das *offene Innere* (oder *Innere*) von T.

Definition 89.2. Es sei X ein topologischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$\overline{T} = \bigcap_{A \text{ abgeschlossen}, T \subseteq A} A$$

der *Abschluss* (oder *topologische Abschluss*) von T.

Diese beiden Begriffe stehen durch

$$\overline{T} = X \setminus (X \setminus T)^o$$

miteinander in Beziehung.

Definition 89.3. Es sei X ein topologischer Raum und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt der topologische Abschluss

$$\overline{\{x \in X |\, f(x) \neq 0\}}$$

der *Träger* von f.

DEFINITION 89.4. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *kompakte Ausschöpfung* A_n, $n \in \mathbb{N}$, von X ist eine Folge von kompakten Teilmengen $A_n \subseteq X$ mit

$$A_n \subseteq A_{n+1}^o \text{ und } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X .$$

LEMMA 89.5. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann besitzt M eine kompakte Ausschöpfung.*

Beweis. Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es eine offene Kartenumgebung $P \in U$,

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

sowie Ballumgebungen

$$U(\alpha(P), \epsilon) \subseteq B(\alpha(P), \epsilon) \subset V .$$

Wegen der Homöomorphie der Kartenabbildung und der Kompaktheit der abgeschlossenen Bälle ist $B_P = \alpha^{-1}(B(\alpha(P), \epsilon))$ eine kompakte Teilmenge von M, die die offene Umgebung $U_P = \alpha^{-1}(U(\alpha(P), \epsilon))$ von P umfasst. Die U_P, $P \in M$, bilden eine offene Überdeckung von M, so dass es nach Aufgabe 63.4 eine abzählbare Teilüberdeckung gibt. Diese sei mit U_n, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet (wobei die U_n in den kompakten Teilmengen B_n liegen). Wir definieren nun rekursiv eine monoton wachsende Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\, k \longmapsto n_k,$$

derart, dass

$$A_k = \bigcup_{n=0}^{n_k} B_n, k \in \mathbb{N},$$

eine kompakte Ausschöpfung von M ist. Als eine endliche Vereinigung von kompakten Mengen sind diese A_k kompakt. Wir beginnen mit $n_0 = 0$. Sei n_k schon konstruiert. Die Menge

$$A_k \cup B_{n_k+1}$$

ist kompakt und wird daher von endlich vielen offenen Mengen $\bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n$ überdeckt, wobei wir $n_{k+1} \geq n_k + 1$ wählen. Mit dieser Wahl ist

$$A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} B_n = A_{k+1},$$

und diese Folge bildet eine Ausschöpfung, da die U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Überdeckung bilden. □

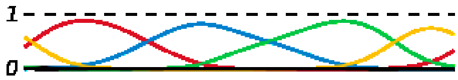
DEFINITION 89.6. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} W_i$ eine offene Überdeckung von X. Eine Familie von Funktionen

$$h_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $j \in J$ heißt eine *der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins*, wenn folgende Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $h_j(X) \subseteq [0,1]$ für alle $j \in J$.
(2) Jeder Punkt $P \in X$ besitzt eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass die eingeschränkten Funktionen $h_j|_U$ bis auf endlich viele Ausnahmen die Nullfunktion sind.
(3) Es ist $\sum_{j \in J} h_j = 1$.
(4) Für jedes $j \in J$ gibt es eine offene Menge $W_{i(j)}$ aus der Überdeckung derart, dass der Träger von h_j in $W_{i(j)}$ liegt.

Wenn alle h_j stetig sind, so spricht man von einer *stetigen Partition der Eins*.



Die ersten drei Eigenschaften sind die Partitionseigenschaften, die vierte Eigenschaft bedeutet, dass die Partition der Überdeckung untergeordnet ist. Die zweite Eigenschaft sichert dabei, dass die Summe in (3) definiert ist, da für jeden Punkt $P \in X$ und fast alle $j \in J$ die Gleichheit $h_j(P) = 0$ gilt.

Bei einer Mannigfaltigkeit nennt man eine solche Partition *differenzierbar*, wenn alle h_j differenzierbare Funktionen sind.

LEMMA 89.7. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} W_i$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es einen abzählbaren verträglichen Atlas (U_j, α_j, V_j), $j \in J$, mit Ballumgebungen*

$$U(0, \delta_j) \subset B(0, \epsilon_j) \subset V_j$$

(dabei ist $0 \in V_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta_j < \epsilon_j$) derart, dass es für jedes $j \in J$ ein $W_{i(j)}$ gibt mit $U_j \subseteq W_{i(j)}$, dass M von $\alpha_j^{-1}(U(0, \delta_j))$, $j \in J$, überdeckt wird und dass jeder Punkt $P \in M$ nur in endlich vielen der Mengen U_j liegt.

Beweis. Es sei die offene Überdeckung W_i, $i \in I$, gegeben. Ferner sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine kompakte Ausschöpfung von M, die es nach Lemma 89.5 gibt. Die offenen Mengen $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$ bilden ebenfalls eine offene Überdeckung, da es zu jedem Punkt $P \in M$ ein minimales $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $P \in A_n$ (es sei $A_{-1} = \emptyset$). Indem wir die Durchschnitte $W_i \cap (A_{n+1}^o \setminus A_{n-1})$ betrachten, können wir annehmen, dass alle Mengen der Überdeckung innerhalb von einem $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$ liegen. Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es eine offene (verträgliche) Kartenumgebung $P \in U_P$, die in einem der W_i liegt und für die es Ballumgebungen

$$U(0, \delta_P) \subset B(0, \epsilon_P) \subset V_P$$

gibt mit $P \in \alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P))$ und $\delta_P < \epsilon_P$. Diese $\alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P)$, $P \in M$, bilden dann ebenfalls eine offene Überdeckung von M. Nach Aufgabe 63.4 können wir zu einer abzählbaren Teilüberdeckung davon übergehen. Wir können also annehmen, dass ein System von Karten U_n, $n \in \mathbb{N}$, zusammen mit Ballumgebungen

$$U(0,\delta_n) \subset B(0,\epsilon_n) \subset V_n$$

derart gegeben ist, dass auch $\alpha_n^{-1}(U(0,\delta_n))$, $n \in \mathbb{N}$, eine offene Überdeckung ist, dass jedes U_n in einem $W_{i(n)}$ liegt und dass die oben beschriebene Beziehung zu der kompakten Ausschöpfung gilt. Wir werden eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ definieren derart, dass die Familie U_j, $j \in J$, auch noch die Endlichkeitseigenschaft erfüllt. Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die kompakte Menge $A_{n+1} \setminus A_n^o$. Diese wird von endlich vielen der $\alpha_k^{-1}(U(0,\delta_k))$, $k \in \mathbb{N}$, überdeckt, und zwar braucht man dazu nur Indizes k mit der Eigenschaft, dass U_k in $A_{n+2}^o \setminus A_{n-1}$ liegt. Die zugehörige endliche Indexmenge sei mit J_n bezeichnet, und sei $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Dann wird jedes A_n nur von endlich vielen der U_k, $k \in J$, getroffen. □

Satz 89.8. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine der Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins.*

Beweis. Nach Lemma 89.7 können wir davon ausgehen, dass eine offene Überdeckung von Kartengebieten U_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\alpha_n : U_n \longrightarrow V_n$$

und mit Ballumgebungen

$$U(0,\delta_n) \subset B(0,\epsilon_n) \subset V_n$$

(mit $\delta_n < \epsilon_n$) vorliegt derart, dass auch die $\alpha_n^{-1}(U(0,\delta_n))$ eine Überdeckung bilden und dass jeder Punkt $P \in M$ nur in endlich vielen dieser offenen Bälle enthalten ist. Auf V_n betrachten wir die Funktion g_n, die durch

$$g_n(v) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\delta_n^2 - v^2)^2}} \text{ für } |v| < \delta_n\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definiert ist. Diese Funktion hat genau auf $U(0,\delta_n)$ einen positiven Wert und ihr Träger ist $B(0,\delta_n)$. Eine Überlegung auf den beiden offenen Teilmengen (die V_n überdecken) $U(0,\epsilon_n)$ und $V_n \setminus B(0,\delta_n)$ zeigt, dass g_n unendlich oft differenzierbar ist. Wir definieren eine Funktion

$$\tilde{g}_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g(\alpha_n(x)) \text{ für } x \in \alpha_n^{-1}(U(0,\delta_n))\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf M, da der „Streifen“ $B(0,\epsilon_n) \setminus U(0,\delta_n)$ einen glatten Übergang erlaubt. Wir setzen

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{g}_n(x)\,,$$

wobei dies für jeden Punkt eine endliche Summe ist, da der Träger von $\tilde{g}_n$ in $\alpha^{-1}(B(0,\delta_n)) \subset U_n$ liegt. Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf M und überall positiv, da die $\tilde{g}_n(x)$ auf den überdeckenden Mengen $\alpha^{-1}(U(0,\delta_n))$ positiv sind. Dann bilden die

$$h_n = \frac{\tilde{g}_n}{\tilde{g}}$$

die gesuchte Partition der Eins. $\square$

Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten und Volumenformen

Mit Hilfe von Partitionen der Eins können wir nun die Umkehrung von Lemma 84.5 beweisen.

SATZ 89.9. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann existiert genau dann eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf M, wenn M orientierbar ist. Diese Volumenform kann dann auch stetig differenzierbar und positiv gewählt werden.*

Beweis. Die eine Richtung wurde bereits in Lemma 84.5 bewiesen. Es sei also umgekehrt ein abzählbarer orientierter Atlas (U_i, V_i, α_i), $i \in I$, von M gegeben. Dabei ist $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ definieren eine nullstellenfreie stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) Volumenfom $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ auf V_i. Wir setzen

$$\omega_i = \alpha_i^* dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und erhalten so eine nullstellenfreie Volumenform auf U_i, die wir außerhalb von U_i durch 0 fortsetzen.[1]

Es sei nun h_j, $j \in J$, eine der Überdeckung U_i, $i \in I$, untergeordnete, stetige Partition der Eins, die es nach Satz 89.8 gibt. Insbesondere gibt es also für jedes j ein $i(j)$ derart, dass der Träger von h_j in $U_{i(j)}$ liegt. Daher sind die $h_j \omega_{i(j)}$ stetige n-Differentialformen auf M. Wir setzen

$$\omega = \sum_{j \in J} h_j \omega_{i(j)}.$$

Dies ist für jeden Punkt $P \in M$ eine endliche Summe und somit eine wohldefinierte stetige n-Differentialform auf M. Für einen Punkt $P \in M$ und eine die Orientierung repräsentierende Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $T_P M$ ist

$$\omega(P; v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j \in J} h_j(P) \omega_{i(j)}(P; v_1, \ldots, v_n).$$

Dabei gibt es ein j mit $h_j(P) > 0$, und für dieses j ist auch $\omega_{i(j)}(P; v_1, \ldots, v_n) > 0$, so dass diese Form überall positiv ist. $\square$

[1] Diese Fortsetzung ist natürlich nicht stetig, das spielt aber für das Folgende keine Rolle.

Abbildungsverzeichnis