Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

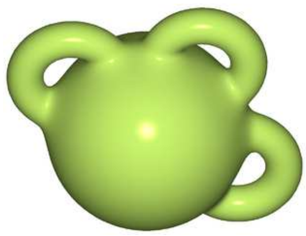
Mathematik III

Vorlesung 85

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Die Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius r besitzt den Flächeninhalt $4\pi r^2$. Dies ist ein klassisches Resultat, doch wie kann man den Flächeninhalt einer solchen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit präzise erfassen? Um die Maß- und Integrationstheorie der vorhergehenden Vorlesungen anwenden zu können, brauchen wie eine 2-Form auf der Fläche. Über den Begriff der Riemannschen Metrik werden wir zeigen, dass es auf Flächen, die im dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet sind, ein natürliches Flächenmaß gibt, mit dem man den Flächeninhalt ausrechnen kann.



Die grüne Oberfläche erbt vom umgebenden euklidischen Raum das Skalarprodukt. Dies erlaubt darauf eine sinnvolle Flächenmessung.

Definition 85.1. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt *riemannsche Mannigfaltigkeit*, wenn auf jedem Tangentialraum T_PM, $P \in M$, ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_P$ erklärt ist derart, dass für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ die Funktionen (für $1 \leq i, j \leq n$)

$$g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R},\ Q \longmapsto g_{ij}(Q) = \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)},$$

C^1-differenzierbar sind.[1]

Die auf den Karten definierten Funktionen g_{ij} fasst man zu einer Matrix $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ zusammen, die man auch die *metrischen Fundamentalmatrix* (oder den *metrischen Fundamentaltensor*) nennt. Diese Matrix ist in jedem Punkt $Q \in V$ symmetrisch und positiv definit. Wichtig ist auch die Determinante davon, also

$$g = \det (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} ,$$

die ebenfalls stetig differenzierbar ist und die nach Korollar 47.2 überall positiv ist.

Das einfachste Beispiel einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt (und überhaupt jeder euklidische Raum) sowie eine jede offene Teilmenge davon. Wichtiger ist, dass auch jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer riemannschen Mannigfaltigkeit wieder eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Dadurch ergeben sich viele nichttriviale Beispiele, wie bspw. Flächen im $\mathbb{R}^3$ wie die Sphäre oder der Torus.

Satz 85.2. *Sei N eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Dann ist M ebenfalls eine riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Für jeden Punkt $P \in M$ ist $T_P M \subseteq T_P N$ ein Untervektorraum nach Satz 79.3. Daher induziert das Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_P$ auf $T_P N$ ein Skalarprodukt auf $T_P M$. Für die stetige Differenzierbarkeit des Skalarproduktes sei

$$\theta : W \longrightarrow W'$$

eine Karte von N mit $W' \subseteq \mathbb{R}^n$, die eine Bijektion α zwischen $M \cap W$ und $\mathbb{R}^m \times \{0\} \cap W'$ induziere. Unter dieser Identifizierung ist $T_P M \cong \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit den Basisvektoren e_i, $i \leq m$. Für Paare e_i, e_j, $1 \leq i, j \leq m$, von solchen Vektoren gilt dann für $Q \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap W'$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} h_{ij}(Q) &= \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)} \\ &= \langle T(\theta^{-1})(e_i), T(\theta^{-1})(e_j) \rangle_{\theta^{-1}(Q)} \\ &= g_{ij}(Q), \end{aligned}$$

da ja das Skalarprodukt auf $T_{\alpha^{-1}(Q)} M$ einfach die Einschränkung des Skalarproduktes auf $T_{\alpha^{-1}(Q)} N$ ist und da α die Einschränkung von θ ist. □

[1]Viele Autoren fordern, dass eine riemannsche Mannigfaltigkeit und diese Funktionen von der Klasse C^∞ sind.

Vektorfelder und 1-Formen auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit

Böse Zungen behaupten, dass Physiker nicht den Unterschied zwischen Vektorfeldern und 1-Formen kennen. Auf riemannschen Mannigfaltigkeiten entsprechen sich in der Tat diese Objekte.

Lemma 85.3. *Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M),\, F \longmapsto \omega_F,$$

mit

$$(\omega_F(P))(v) := \langle F(P), v \rangle_P \,,$$

wobei $P \in M$ ist und v einen Tangentenvektor aus T_PM bezeichnet, eine Isomorphie zwischen den Vektorfeldern und den 1-Formen auf M.

Beweis. Für jeden Punkt $P \in M$ ist die Abbildung

$$T_PM \longrightarrow T_P^*M,\, u \longmapsto \langle u, - \rangle_P,$$

nach Lemma 46.1 eine Isomorphie. Daraus folgt direkt die globale Aussage. □

Bemerkung 85.4. Auf einem euklidischen Vektorraum entsprechen sich die Vektorfelder und die 1-Differentialformen gemäß Lemma 85.3. Das gleiche gilt für eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, und Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ lassen sich auf M einschränken. Daher kann man auch ein Vektorfeld F auf $\mathbb{R}^n$ zu einem Vektorfeld auf M zurückziehen: man betrachtet die zugehörige Differentialform auf $\mathbb{R}^n$, die zurückgezogene Differentialform auf M und dazu das zugehörige Vektorfeld auf M. Geometrisch gesprochen wird dabei einem Punkt $P \in M$ aber nicht die Richtung $F(P)$ zugeordnet, da dieser Vektor im Allgemeinen gar nicht zum Tangentialraum $T_PM \subseteq T_P\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ gehört. Stattdessen muss man die orthogonale Projektion von $F(P)$ auf T_PM nehmen (hierbei wird also die euklidische Struktur verwendet).

Beispiel 85.5. Als Beispiel zu Bemerkung 85.4 betrachten wir den Einheitskreis $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und das konstante Vektorfeld e_1 auf $\mathbb{R}^2$, das also jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ den ersten Standardvektor als Richtung zuordnet. Die zugehörige Differentialform ist dx, die e_1 auf 1 und e_2 auf 0 abbildet. Die auf S^1 zurückgezogene Differentialform wird ebenfalls mit dx bezeichnet und besitzt die gleiche Wirkungsweise, allerdings eingeschränkt auf den jeweiligen Tangentialraum $T_PS^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Das zu dieser Differentialform auf S^1 gehörige Vektorfeld H berechnet sich nach Lemma 85.3 folgendermaßen: für jeden Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^1$ und jeden Vektor

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in T_P M$ muss

$$\langle H(P), v \rangle = dx(P)(v) = v_1$$

gelten, wobei $H(P) \in T_P M$ sein muss. Der Tangentialraum ist eindimensional und wird von $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannt. Daher besizt H die Gestalt

$$H(P) = c \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

und aus der Bedingung

$$\langle H(P), v \rangle = \langle c \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rangle = cd = -bd$$

folgt direkt $c = -b$. Das zurückgezogene Vektorfeld ist demnach

$$H(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = -b \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Die kanonische Volumenform auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit

Definition 85.6. Es sei M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zu $P \in M$ sei ω_P diejenige alternierende Form auf $T_P M$ (bzw. das entsprechende Element aus $\bigwedge^n T_P^* M$), die jeder die Orientierung repräsentierenden Orthonormalbasis den Wert 1 zuordnet. Dann heißt die n-Differentialform

$$M \longrightarrow \bigwedge^n T^* M, \; P \longmapsto \omega_P,$$

die *kanonische Volumenform* auf M.

Das zugehörige Maß zu dieser positiven Form heißt *kanonisches Maß* auf M. Wir bezeichnen es mit λ_M. Demnach ist $\lambda_M(M)$ das Gesamtmaß (der Flächeninhalt, das Volumen) von M.

Lemma 85.7. *Es sei M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit und ω die kanonische Volumenform. Es sei*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine orientierte Karte mit der metrischen Fundamentalmatrix $G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $g = \det G$. Es sei $T \subseteq U$ eine messbare Teilmenge. Dann ist

$$\int_T \omega = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} \, d\lambda^n.$$

Beweis. Gemäß der Definition müssen wir die Differentialform $(\alpha^{-1})^*\omega$ für jeden Punkt $Q \in V$ berechnen. Diese Form besitzt die Gestalt $c_Q dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ und ist durch ihren Wert auf $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ festgelegt. Es ist

$$\begin{aligned} & (\alpha^{-1})^*\omega(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) \\ = \; & \omega(T_Q(\alpha^{-1})(e_1) \wedge \ldots \wedge T_Q(\alpha^{-1})(e_n)). \end{aligned}$$

Nach Definition der metrischen Fundamentalmatrix ist

$$g_{ij}(Q) = \langle T_Q(\alpha^{-1})(e_i), T_Q(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)} \,.$$

Nach Satz 68.8 ist

$$\begin{aligned} & \omega(T_Q(\alpha^{-1})(e_1) \wedge \ldots \wedge T_Q(\alpha^{-1})(e_n)) \\ = \; & (\det (\langle T_Q(\alpha^{-1})(e_i), T_Q(\alpha^{-1})(e_j) \rangle)_{1 \leq i,j \leq n})^{1/2} \\ = \; & \sqrt{g(Q)}. \end{aligned}$$

□

Satz 85.8. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sei $M \subseteq G$ eine n-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, die orientiert und mit der induzierten riemannschen Struktur und der kanonischen Volumenform ω versehen sei. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei*

$$\varphi : W \longrightarrow U$$

ein Diffeomorphismus mit der offenen Menge $U \subseteq M$.[2] *Dann ist φ^{-1} eine Karte von M, und auf W gilt*

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega|_U) &= (\det (\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} \rangle)_{1 \leq i,j \leq n})^{1/2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= (\det (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n})^{1/2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Beweis. Die zweite Gleichung ergibt sich einfach durch Auswertung des Standardskalarproduktes auf dem $\mathbb{R}^m$. Nach Definition der metrischen Fundamentalmatrix ist für $Q \in W$

$$\begin{aligned} g_{ij}(Q) &= \langle T_Q(\varphi)(e_i), T_Q(\varphi)(e_j) \rangle_{\varphi(Q)} \\ &= \langle T_Q(\varphi)(e_i), T_Q(\varphi)(e_j) \rangle \\ &= \langle (D\varphi)_Q(e_i), (D\varphi)_Q(e_j) \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(Q) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(Q) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(Q) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(Q) \end{pmatrix} \rangle, \end{aligned}$$

da ja der Tangentialraum $T_{\varphi(Q)}M$ das induzierte Skalarprodukt des $\mathbb{R}^m$ trägt, da die Tangentialabbildung im lokalen Fall das totale Differential ist und da

[2] Man sagt auch, dass φ eine (diffeomorphe) *Parametrisierung* von U ist.

man dessen Einträge mit den partiellen Ableitungen ausdrücken kann. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 85.7. $\square$

Beispiel 85.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine reguläre differenzierbare Kurve, es sei also überall $\varphi'(t) \neq 0$. Ferner sei angenommen, dass φ injektiv und dass das Bild $M = \varphi(I)$ von I eine eindimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist. Dann gilt nach Satz 85.8 für die kanonische Form ω von M (bzw. das kanonische Maß, das in diesem Fall ein Längenmaß ist) die Beziehung

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega &= (\langle \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix} \rangle)^{1/2} dt \\ &= \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \ldots + (\varphi_m'(t))^2} dt \\ &= \|\varphi'(t)\| \, dt. \end{aligned}$$

Somit gilt bei $I =]a, b[$ für das Maß (also die Länge) von M die Formel

$$\lambda_M(M) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \ldots + (\varphi_m'(t))^2}(t) \, dt.$$

Dies stimmt mit der in Satz 41.6 über die Theorie der rektifizierbaren Kurven erzielten Formel überein.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Georg Friedrich Bernhard Riemann.jpeg, Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = PD 1

Quelle = Sphere with three handles.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrow auf Commons, Lizenz = PD 1