

## Mathematik III

### Vorlesung 84

Wir kommen nun zur Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten. Ausgangspunkt dafür ist, dass auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  eine  $n$ -Form gegeben ist. Bei einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit den Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  entspricht dabei die Integration bezüglich der Form  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  der Integration bezüglich des Lebesgue-Maßes. Bei einer Mannigfaltigkeit muss man die Form und das zugehörige Maß „zusammenkleben“.

#### Positive Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit

In der folgenden Definition bezeichnen wir zu einer Karte  $\alpha : U \rightarrow V$  und einer Differentialform  $\omega$  auf  $U$  die nach  $V$  transportierte Differentialform mit  $\alpha_*\omega$ . Das ist dasselbe wie die zurückgezogene Form  $\alpha^{-1*}\omega$ .

DEFINITION 84.1. Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine messbare  $n$ -Differentialform auf  $M$ . Dann heißt  $\omega$  eine *positive Volumenform*, wenn für jede Karte (eines gegebenen Atlases)

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und Koordinatenfunktionen  $x_1, \dots, x_n$ ) in der lokalen Darstellung der Differentialform

$$\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

die Funktion  $f$  überall positiv ist.<sup>1</sup>

Eine solche positive Volumenform kann es nur geben, wenn die Mannigfaltigkeit orientierbar ist (siehe Lemma 84.5 weiter unten).

LEMMA 84.2. *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und es sei  $\omega$  eine positive Volumenform auf  $M$ . Es sei  $T \subseteq M$  eine Borelmenge. Zu einer Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $\alpha_*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und einer messbaren Teilmenge  $T \subseteq U$  setzen wir

$$\nu(\alpha, T) = \int_{\alpha(T)} f d\lambda^n$$

Dann gelten folgende Eigenschaften.

<sup>1</sup>Die zur Karte  $U$  gehörenden Funktionen  $f$ , die hier mit der  $n$ -Standardform multipliziert werden, entsprechen den am Ende der 82sten Vorlesung erwähnten Dichten, mit denen ein Maß auf der Mannigfaltigkeit beschrieben werden kann.

- (1) Wenn  $T \subseteq U_1, U_2$  zwei Kartenumgebungen sind, so ist  $\nu(\alpha_1, T) = \nu(\alpha_2, T)$ .
- (2) Es gibt eine abzählbare disjunkte Vereinigung  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  derart, dass jedes  $T_i$  ganz in einer Karte  $U_i$  liegt.
- (3) Die Summe  $\sum_{i \in I} \nu(\alpha_i, T_i)$  ist unabhängig von der gewählten abzählbaren disjunkten Zerlegung in (2).

*Beweis.* (1). Wegen  $T \subseteq U_1 \cap U_2$  können wir  $U = U_1 = U_2$  annehmen (aber mit unterschiedlichen Kartenabbildungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  nach  $V_1$  bzw.  $V_2$ ). Es sei

$$\psi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

der diffeomorphe Kartenwechsel. Dann gelten nach Satz 75.3 und nach Korollar 83.9, und da wir wegen der Positivität die Betragsstriche weglassen können, die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \nu(\alpha_2, T) &= \int_{\alpha_2(T)} f_2 d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) |\det(D\psi)| d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) \cdot \det(D\psi) d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} f_1 d\lambda^n \\ &= \nu(\alpha_1, T). \end{aligned}$$

(2). Es sei  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine abzählbarer Atlas. Dann kann man die Mengen  $T_n = T \cap (U_n \setminus \bigcup_{m < n} U_m)$  nehmen. (3). Es seien  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i = \bigsqcup_{j \in J} S_j$  zwei abzählbare disjunkte messbare Zerlegungen, deren Glieder jeweils in Karten enthalten seien. Die Karten seien einerseits  $(U_i, \alpha_i)$  mit den die Form beschreibenden Funktionen  $f_i$  und andererseits  $(V_j, \beta_j)$  mit den die Form beschreibenden Funktionen  $g_j$ . Wir betrachten die ebenfalls abzählbare Zerlegung, die durch die Mengen  $T_i \cap S_j$ ,  $(i, j) \in I \times J$ , gegeben ist. Nach Lemma 71.1 (angewendet auf die einzelnen Kartenbilder) gilt dann unter Verwendung von Teil (1)

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \left( \int_{\alpha_i(T_i)} f_i d\lambda^n \right) &= \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} \int_{\alpha_i(T_i \cap S_j)} f_i d\lambda^n \right) \\ &= \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j d\lambda^n \right) \\ &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j d\lambda^n \right) \\ &= \sum_{j \in J} \left( \int_{\beta_j(S_j)} g_j d\lambda^n \right). \end{aligned}$$

□

DEFINITION 84.3. Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es sei  $\omega$  eine positive Volumenform auf  $M$ . Dann heißt die für jede Borelmenge  $T \subseteq M$  durch eine abzählbare Zerlegung  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  (wobei  $T_i \subseteq U_i$  ein offenes Kartengebiet und  $\alpha_{i*}\omega = f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ist) definierte Zahl

$$\int_T \omega = \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(T)} f_i d\lambda^n$$

(aus  $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ) das Maß von  $T$  zu  $\omega$  oder das Integral von  $\omega$  über  $T$ .

Nach dem vorstehenden Lemma ist dieses Volumenmaß wohldefiniert. Nach Aufgabe 84.2 handelt es sich um ein  $\sigma$ -endliches Maß.

LEMMA 84.4. *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  positive Volumenformen auf  $M$ . Dann gilt für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq M$  und  $a, b \in \mathbb{R}_+$  die Beziehung*

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 84.4. □

## Volumenformen und Orientierung

Die Existenz einer stetigen nullstellenfreien Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit hängt eng mit ihrer Orientierbarkeit zusammen. Von der folgenden Aussage werden wir in Satz 89.8 auch die Umkehrung beweisen.

LEMMA 84.5. *Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$ . Dann gibt es einen (diffeomorph-äquivalenten) orientierten Atlas für  $M$  derart, dass  $\omega$  eine positive Volumenform bzgl. diesem Atlas wird. Insbesondere ist  $M$  orientierbar.*

*Beweis.* Zu  $P \in M$  betrachtet man Kartengebiete  $P \in U$  mit der Eigenschaft, dass  $U$  homöomorph zu einem offenen Ball  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  ist. Es ist

$$\bigwedge^m TU \cong \bigwedge^m TV \cong V \times \mathbb{R}$$

mittels  $\bigwedge^m(\alpha)$ . Dabei hängt die hintere Isomorphie von der Wahl einer Basis  $v_1, \dots, v_m$  auf  $\mathbb{R}^m$  mit Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  ab. Es sei  $\omega' = \alpha_\omega$  die zugehörige 1-Differentialform auf  $V$ . Diese Form ist nullstellenfrei, und da  $V$  zusammenhängend ist, ist  $\omega'$  nach dem Zwischenwertsatz positiv oder negativ. Im negativen Fall ersetzen wir die Karte, indem wir ein Basiselement durch sein Negatives ersetzen. Dadurch gewinnen wir für jeden Punkt eine Kartenumgebung, auf der die Form positiv ist. Zu zwei Karten  $\alpha : U \rightarrow V$

und  $\beta : U \rightarrow V'$  mit der Übergangsabbildung  $\psi = \beta \circ \alpha^{-1}$  und den lokalen Beschreibungen  $\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  und  $\beta_*\omega = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$  gilt dann wegen  $\psi^*(\beta_*\omega) = \alpha_*\omega$  nach Korollar 83.9 die Beziehung  $f = g \circ \psi \det(D\psi)$ . Da  $f$  und  $g$  positiv sind, muss auch die Determinante positiv sein, so dass die Übergangsabbildung orientierungstreu und die Mannigfaltigkeit somit orientiert ist.  $\square$

KOROLLAR 84.6. *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

*(mit  $m = n - \ell \geq 0$ ) eine stetig differenzierbare Abbildung, die in jedem Punkt der Faser  $M$  über  $0 \in \mathbb{R}^\ell$  regulär sei. Dann ist die Abbildung*

$$\bigwedge^m T_P M \longrightarrow \mathbb{R}, v_1 \wedge \dots \wedge v_m \longmapsto \det(\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P), v_1, \dots, v_m),$$

*in jedem Punkt  $P \in M$  eine Isomorphie, wodurch eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$  gegeben ist.*

*Beweis.* Nach Aufgabe 81.12 und nach Korollar 80.7 ist die Abbildung wohldefiniert. Es sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von

$$T_P M = \text{kern}(D\varphi)_P = (\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P))^\perp.$$

Da die Abbildung regulär ist, sind die Gradienten rechts untereinander linear unabhängig, und wegen der Orthogonalitätsbeziehung erst recht linear unabhängig zu den  $v_i$ . Daher liegt insgesamt eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  vor, so dass nach Satz 14.13 die Determinante  $\neq 0$  ist.  $\square$

BEMERKUNG 84.7. In der Situation von Korollar 84.6 erhält man nicht nur eine nullstellenfreie Volumenform, sondern auch eine Orientierung auf jedem Tangentialraum und überhaupt eine orientierte Mannigfaltigkeit. Man definiert die Orientierung auf  $T_P M$  dadurch, dass man festlegt, dass eine Basis  $v_1, \dots, v_m$  die Orientierung repräsentiert, wenn die erweiterte Basis  $\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P), v_1, \dots, v_m$  die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  repräsentiert.

BEISPIEL 84.8. Wir betrachten die 2-Sphäre  $S^2$  als Faser über 0 zur differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Wir können darauf Korollar 84.6 anwenden und erhalten durch

$$\bigwedge^2 T_P S^2 \longrightarrow \mathbb{R}, v_1 \wedge v_2 \longmapsto \det(\text{grad } \varphi(P), v_1, v_2)$$

(wobei die Tangentenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  wegen  $T_P S^2 \subseteq T_P \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$  direkt im  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden können), eine stetige nullstellenfreie Volumenform  $\omega$ . Dies führt zu einer positiven Volumenform und zu einer Orientierung auf  $S^2$ . Zwei linear unabhängige Tangentialvektoren  $v_1$  und  $v_2$  repräsentieren die Orientierung, wenn  $\omega(v_1, v_2) > 0$  ist, und dies ist genau dann der Fall,

wenn die drei Vektoren  $\text{grad } \varphi(P)$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^3$  repräsentieren.

### Integration längs einer differenzierbaren Abbildung

Auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  sind nur  $n$ -Formen über  $M$  sinnvoll integrierbar. Man möchte aber auch  $k$ -Formen ( $1 \leq k \leq n$ ) über gewisse  $k$ -dimensionale Unterobjekte integrieren können. Das passende Konzept ist dabei die Integration längs einer differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

einer  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $L$ . Dabei integriert man über  $L$  einfach die mit  $\varphi$  zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\omega$  zu einer Form  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ . Auf  $L$  passen dabei die Dimension und der Grad der Form zusammen. Ein wichtiger Spezialfall ist dabei der von 1-Formen und differenzierbaren Kurven

$$\gamma : I \longrightarrow M,$$

die dabei entstehenden Integrale nennt man *Wegintegrale*.

DEFINITION 84.9. Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$  eine 1-Differentialform. Es sei

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) dt$$

das *Wegintegral* von  $\omega$  längs  $\gamma$ .

BEMERKUNG 84.10. Im physikalischen Kontext beschreibt eine 1-Differentialform (bzw. ihre duale Version, ein Vektorfeld) eine Kraft; das Wegintegral ist dann der *Arbeitsaufwand* oder die *Energie*, die gebraucht oder freigesetzt wird, wenn sich ein Teilchen auf dem Weg bewegt.

Häufig werden wir Differentialformen auf einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq G$ ,  $G$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , betrachten, die sogar auf  $G$  definiert sind und daher die Gestalt  $\omega = \sum_{i=1}^n g_i dx_i$  besitzen, wobei die  $x_i$  die Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$  und die  $g_i$  auf  $G$  definierte Funktionen sind. Für einen Weg in  $M$  ist es nach Aufgabe 84.7 gleichgültig, ob man das Wegintegral mit Bezug auf  $G$  und  $\omega$  oder mit Bezug auf  $M$  und die eingeschränkte Differentialform  $\omega|_M$  betrachtet.

BEMERKUNG 84.11. Ein Wegintegral wird folgendermaßen berechnet. Sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, die durch

$$\omega = g_1 dx_1 + \dots + g_n dx_n$$

beschrieben werde, wobei die  $g_j : G \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind. Es sei eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  gegeben mit den (stetig differenzierbaren) Komponentenfunktionen  $\gamma_j$ . Die Ableitung in einem Punkt  $t \in [a, b]$  wird dann nach Lemma 40.4 durch den Vektor  $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  beschrieben. Die zurückgenommene Differentialform  $\gamma^*\omega$  hat dann im Punkt  $t$  in Richtung 1 den Wert

$$\begin{aligned}\omega(\gamma(t); \gamma'(t)) &= (g_1(\gamma(t))dx_1 + \dots + g_n(\gamma(t))dx_n) \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= g_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + g_n(\gamma(t))\gamma'_n(t).\end{aligned}$$

Im mittleren Ausdruck wird eine Linearform auf einen Vektor angewendet. In  $g_j(x_1, \dots, x_n)$  wird also  $x_i$  durch  $\gamma_i(t)$  und  $dx_i$  wird durch  $\gamma'_i(t)$  ersetzt. Das Gesamtergebnis ist eine stetige Funktion von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$ , die man integrieren kann.

BEISPIEL 84.12. Wir betrachten die Differentialform

$$\omega = (xy + z^2)dx + zdy + x^3dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$  und den affin-linearen Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (1, 2, 0) + t(3, 0, 2) = (1 + 3t, 2, 2t).$$

Die unter  $\gamma$  zurückgenommene Differentialform  $\gamma^*\omega$  ist

$$\begin{aligned}&(((1 + 3t)2 + (2t)^2)dx + 2tdy + (1 + 3t)^3dz) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (3((1 + 3t)2 + (2t)^2) + 2(1 + 3t)^3)dt \\ &= (12t^2 + 18t + 6 + 54t^3 + 54t^2 + 18t + 2)dt \\ &= (54t^3 + 66t^2 + 36t + 8)dt.\end{aligned}$$

Für das Integral über dem Einheitsintervall ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (54t^3 + 66t^2 + 36t + 8) dt \\ &= \left(\frac{27}{2}t^4 + 22t^3 + 18t^2 + 8t\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{123}{2}.\end{aligned}$$