

## Mathematik III

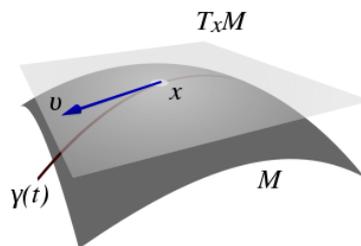
### Vorlesung 78

#### Der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Für die Faser einer differenzierbaren Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, in einem regulären Punkt  $P \in G$  haben wir den Tangentialraum an die Faser durch  $P$  als Kern des totalen Differentials definiert. Dadurch war der Tangentialraum ein  $(n - m)$ -dimensionaler Untervektorraum des umgebenden Vektorraums  $\mathbb{R}^n$ . Für unseren abstrakten Mannigfaltigkeitsbegriff gibt es einen solchen umgebenden Vektorraum nicht, in dem sich alles abspielt. Dennoch können wir auch für eine Mannigfaltigkeit in jedem Punkt einen Tangentialraum erklären. Dieser wird ein Vektorraum sein (dessen Dimension gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit ist), und zu einer differenzierbaren Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten wird das totale Differential in jedem Punkt eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen sein. Wenn man für einen Punkt  $P \in M$  eine offene Umgebung  $P \in U \subseteq M$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

heranzieht mit  $V \subseteq \mathbb{R}^k$ , so liegt es nahe, diesen  $\mathbb{R}^k$  als Tangentialraum zu betrachten. In der Tat wird es eine solche Isomorphie geben, doch als Definition ist dieser Ansatz wegen der Abhängigkeit von der gewählten Karte unbrauchbar. Stattdessen arbeiten wir mit Äquivalenzklassen von differenzierbaren Kurven.



DEFINITION 78.1. Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Es seien

$$\gamma_1 : I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 : I_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Intervallen  $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$  definierte differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$ . Dann heißen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  *tangential äquivalent* in  $P$ , wenn es eine offene Umgebung  $P \in U$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  gibt derart, dass

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) = (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

Wir brauchen einige einfache Lemmata, um nachzuweisen, dass es sich hierbei um einen sinnvollen Begriff handelt.

LEMMA 78.2. *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Es seien*

$$\gamma_1 : I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 : I_2 \longrightarrow M$$

*zwei auf offenen Intervallen  $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$  definierte differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$ . Dann sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  genau dann tangential äquivalent in  $P$ , wenn für jede Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

*mit  $P \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  die Gleichheit*

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) = (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

*gilt.*

*Beweis.* Für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = P$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit  $P \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ) ändert sich der Ausdruck

$$(\alpha \circ (\gamma|_{\gamma^{-1}(U)}))'(0)$$

nicht, wenn man zu einem kleineren offenen Intervall  $0 \in I' \subseteq I$  und einer kleineren offenen Menge  $P \in U' \subseteq U$  (mit der induzierten Karte) übergeht. Wir können also davon ausgehen, dass  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  auf dem gleichen Intervall definiert sind und ihre Bilder in  $U$  liegen, und dass es für dieses  $U$  zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

gibt. Dann folgt aus

$$(\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0) = (\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)$$

nach Satz 44.7 unter Verwendung der Differenzierbarkeit der Übergangsabbildung  $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  sofort

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \circ \gamma_1)'(0) &= ((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1))'(0) \\ &= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0)) \\ &= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)) \\ &= (\alpha_2 \circ \gamma_2)'(0). \end{aligned}$$

□

LEMMA 78.3. *Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Dann ist die tangentielle Äquivalenz von differenzierbaren Kurven durch  $P$  eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Die Reflexivität und die Symmetrie der Relation sind unmittelbar klar. Zum Nachweis der Transitivität seien drei differenzierbare Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \longrightarrow M$$

gegeben, wobei wir sofort annehmen dürfen, dass sie auf dem gleichen offenen Intervall  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  definiert sind. Es seien  $P \in U_1, U_2$  offene Mengen, mit denen man die tangentielle Gleichheit von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bzw. von  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  nachweisen kann. Dann kann man nach Lemma 78.2 mit  $U = U_1 \cap U_2$  die tangentielle Gleichheit von  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  nachweisen. □

Aufgrund dieses Lemmas ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION 78.4. *Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Unter einem *Tangentenvektor* an  $P$  versteht man eine Äquivalenzklasse von tangential äquivalenten differenzierbaren Kurven durch  $P$ . Die Menge dieser Tangentenvektoren wird mit*

$$T_P M$$

bezeichnet.

LEMMA 78.5. *Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $P \in M$  ein Punkt,  $P \in U \subseteq M$  offen und*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

*eine Karte. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$T_P M \longrightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \longmapsto (\alpha \circ (\gamma|_{\gamma^{-1}(U)})'(0),$$

*ist eine wohldefinierte Bijektion.*

(2) *Die durch diese Abbildung auf  $T_P M$  definierte Vektorraumstruktur ist unabhängig von der gewählten Karte.*

*Beweis.* (1). Die Wohldefiniertheit der Abbildung ist klar wegen Lemma 78.2. Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition. Zur Surjektivität sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten die affin-lineare Kurve

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \theta(t) = \alpha(P) + tv,$$

dessen Ableitung in 0 gerade  $v$  ist. Wir schränken diese Kurve auf ein Intervall  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  ein derart, dass  $\theta(I) \subseteq V$  ist und betrachten

$$\gamma = \alpha^{-1} \circ \theta : I \longrightarrow M.$$

Für diese Kurve gilt

$$\gamma(0) = (\alpha^{-1} \circ \theta)(0) = \alpha^{-1}(\theta(0)) = \alpha^{-1}(\alpha(P)) = P$$

und

$$(\alpha \circ \gamma)'(0) = (\alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \theta))'(0) = \theta'(0) = v.$$

(2). Durch Übergang zu kleineren offenen Mengen können wir annehmen, dass zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

vorliegen. Die Übergangsabbildung

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

ist ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und für ihr totales Differential in  $\alpha_1(P)$  gilt nach der Kettenregel die Beziehung

$$(D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma)'(0)) = (\alpha_2 \circ \gamma)'(0).$$

Das bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^n, \end{array}$$

wobei vertikal das totale Differential zu  $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  steht, kommutiert. Da das totale Differential eine lineare Abbildung ist, die in der gegebenen Situation bijektiv ist, macht es keinen Unterschied, ob man die Addition und die Skalarmultiplikation auf  $T_P M$  unter Bezug auf die obere oder die untere horizontale Abbildung definiert.  $\square$

**DEFINITION 78.6.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Unter dem *Tangentenraum* an  $P$ , geschrieben  $T_P M$ , versteht man die Menge der Tangentialvektoren an  $P$  versehen mit der durch eine beliebige Karte gegebenen reellen Vektorraumstruktur.

**DEFINITION 78.7.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Den Dualraum des Tangentialraumes  $T_P M$  an  $P$  nennt man den *Kotangentenraum* an  $P$ . Er wird mit

$$T_P^* M$$

bezeichnet.

LEMMA 78.8. *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$  und es seien*

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

*zwei differenzierbare Kurven mit einem offenen Intervall  $0 \in I$  und  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ . Es seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  im Punkt  $P$  tangential äquivalent. Dann sind auch die Verknüpfungen  $\varphi \circ \gamma_1$  und  $\varphi \circ \gamma_2$  tangential äquivalent in  $Q$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 78.1. □

Aufgrund dieses Lemmas ist der folgende Begriff wohldefiniert.

DEFINITION 78.9. *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$ . Dann nennt man die Abbildung*

$$T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N, [\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma],$$

*die zugehörige Tangentialabbildung im Punkt  $P$ . Sie wird mit  $T_P(\varphi)$  bezeichnet.*

LEMMA 78.10. *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$ ,  $Q = \varphi(P)$  und es sei*

$$T_P(\varphi) : T_P M \longrightarrow T_Q N$$

*die zugehörige Tangentialabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen sind und die Tangentialräume mit den umgebenden euklidischen Räumen identifiziert werden, so ist die Tangentialabbildung gleich dem totalen Differential  $(D\varphi)_P$ .*
- (2)  *$T_P(\varphi)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.*
- (3) *Wenn  $L$  eine weitere Mannigfaltigkeit,  $R \in L$  und*

$$\psi : L \longrightarrow M$$

*eine weitere differenzierbare Abbildung mit  $\psi(R) = P$  ist, so gilt*

$$T_R(\varphi \circ \psi) = T_P(\varphi) \circ T_R(\psi).$$

- (4) *Wenn  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, dann ist  $T_P(\varphi)$  ein Isomorphismus.*

(5) Für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = P$  gilt im Tangentialraum  $T_P M$  die Gleichheit

$$[\gamma] = (T_0(\gamma))(1).$$

*Beweis.* (1). Jeder Tangentialvektor wird repräsentiert durch einen afflinearen Weg  $t \mapsto \gamma(t) = P + tv$  mit einem Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$ . Für den zusammengesetzten Weg  $\varphi \circ \gamma$  gilt nach der Kettenregel

$$(T_P \varphi)(v) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = (D\varphi)_P((D\gamma)_0(1)) = (D\varphi)_P(v).$$

(2). Die Tangentialabbildung in  $P$  lässt sich auf jeder offenen Umgebung von  $P$  bestimmen. Daher kann man annehmen, dass  $M$  und  $N$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  sind; die Aussage folgt dann aus (1) und der Linearität des totalen Differentials. (3). Durch Übergang zu Karten folgt dies aus (1) und der Kettenregel. (4) folgt aus (3) angewendet auf die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$ . (5). Das Element  $1 \in \mathbb{R}$  ist als Tangentenvektor an einem Punkt  $a \in I$  als der Weg  $s \mapsto a + s$  zu interpretieren. Bei  $a = 0$  ist dies der identische Weg. Daher ist

$$(T_0(\gamma))(1) = (T_0(\gamma))(\text{Id}) = [\gamma \circ \text{Id}] = [\gamma].$$

□

DEFINITION 78.11. Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$ . Dann nennt man die zur Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi) : T_P M \longrightarrow T_Q N$$

duale Abbildung

$$T_Q^* N \longrightarrow T_P^* M, h \longmapsto h \circ T_P(\varphi),$$

die *Kotangentialabbildung* im Punkt  $P$ . Sie wird mit  $T_P^*(\varphi)$  bezeichnet.

Ausgeschrieben handelt es sich dabei um die Abbildung

$$T_Q^* N \longrightarrow T_P^* M, h \longmapsto ([\gamma] \mapsto h([\varphi \circ \gamma])),$$

DEFINITION 78.12. Es seien  $L$  und  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  im Punkt  $Q \in L$  *regulär* (und  $Q$  ein *regulärer Punkt* für  $\varphi$ ), wenn die Tangentialabbildung

$$T_Q(\varphi) : T_Q L \longrightarrow T_{\varphi(Q)} M$$

im Punkt  $Q$  maximalen Rang besitzt.

Diese Definition verallgemeinert die entsprechende Definition von euklidischen Teilmengen auf Mannigfaltigkeiten. Sie bedeutet einfach, dass bei  $\dim(L) \geq \dim(M)$  die Tangentialabbildung in  $Q$  surjektiv sein muss und bei  $\dim(L) \leq \dim(M)$  injektiv sein muss.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangentialvektor.svg, Autor = Benutzer TN auf de Wikipedia,  
Lizenz = PD

1