

## Mathematik III

## Vorlesung 68

## Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen

LEMMA 68.1. *Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

*eine bijektive lineare Abbildung. Dann gelten für das Bildmaß  $L_*\lambda^n$  des Borel-Lebesgue-Maßes  $\lambda^n$  unter  $L$  folgende Eigenschaften.*

- (1)  *$L_*\lambda^n$  ist translationsinvariant.*
- (2) *Bei  $V = \mathbb{R}^n$  ist  $L_*\lambda^n = \frac{1}{\lambda^n(P_L)} \cdot \lambda^n$ , wobei  $P_L$  das von den Bildvektoren  $L(e_1), \dots, L(e_n)$  erzeugte Parallelotop bezeichnet.*

*Beweis.* (1). Sei  $\tau_v$  die Translation um den Vektor  $v \in V$ . Es sei  $w = L^{-1}(v)$ . Daher ist

$$\tau_v \circ L = L \circ \tau_w.$$

Somit ist für eine beliebige messbare Menge  $B \subseteq V$  aufgrund der Translationsinvarianz von  $\lambda^n$

$$\begin{aligned} (L_*\lambda^n)(B + v) &= \lambda^n(L^{-1}(B + v)) \\ &= \lambda^n(\tau_w^{-1}(L^{-1}(B + v))) \\ &= \lambda^n(L^{-1}(\tau_v^{-1}(B + v))) \\ &= \lambda^n(L^{-1}(B)) \\ &= (L_*\lambda^n)(B). \end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) mit Lemma 67.12. □

SATZ 68.2. *Es sei*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  die Beziehung*

$$\lambda^n(L(S)) = |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

*Beweis.* Wenn  $L$  nicht bijektiv ist, so folgt die Aussage aus Lemma 67.11 und Satz 14.13. Wir können also annehmen, dass  $L$  bijektiv ist. Dann kann man die Aussage mit dem Bildmaß als

$$L_*\lambda^n = \frac{1}{|\det L|} \lambda^n$$

formulieren. Aufgrund von Satz 13.13 in Verbindung mit Lemma 13.15 gibt es Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_k$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $L = D \circ$

$E_1 \circ \dots \circ E_k$ . Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes und wegen Lemma 64.9 und Aufgabe 68.5 genügt es, die Aussage für Diagonalmatrizen und Elementarmatrizen zu beweisen.

Wegen Lemma 68.1 ist also für diese Matrizen zu zeigen, dass das Volumen des von den Bildvektoren der Standardvektoren erzeugte Parallelotop gleich dem Betrag der Determinante der Matrix ist. Für eine Diagonalmatrix ist das erzeugte Parallelotop der Quader, dessen Seitenlängen die Beträge der Diagonaleinträge sind, so dass das Volumen das Produkt davon ist. Nach Lemma 14.8 ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, so dass im Betrag Gleichheit gilt. Damit gilt die Aussage auch für eine elementare Skalierungsmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist.

Da die Determinante der übrigen Elementarmatrizen 1 oder  $-1$  ist, müssen wir zeigen, dass das Volumen des von den Spaltenvektoren einer solchen Elementarmatrix erzeugten Parallelotops gleich 1 ist. Dies ist klar für den Typ (1), also für die elementare Vertauschungsmatrix, da es sich um den Einheitswürfel handelt, wobei lediglich die Reihenfolge der erzeugenden Vektoren geändert wird. Es bleibt also eine elementare Scherungsmatrix  $A_{ij}(a)$  mit  $a \neq 0$  und  $i \neq j$  zu betrachten. Wegen (Wir notieren nur die zweidimensionale Situation, da sich alles in zwei Zeilen und zwei Spalten abspielt)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und dem schon bewiesenen kann man  $a = 1$  annehmen. Ferner kann man durch unnummerieren annehmen, dass  $i = 1$  und  $j = 2$  ist. Es geht dann um das Volumen des von

$$e_1, e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n$$

erzeugten Parallelotops, also um

$$\begin{aligned} P &= \{t_1 e_1 + t_2(e_1 + e_2) + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{(t_1 + t_2)e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 2], t_2 \leq s \leq 1 + t_2\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$H_1 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], t_2 \geq s\}$$

und

$$H_2 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [1, 2], s \geq 1 + t_2\}.$$

Dann ist

$$[0, 2] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = H_1 \cup P \cup H_2,$$

wobei die Durchschnitte dieser drei Mengen jeweils in einer Hyperebene enthalten sind und daher nach Lemma 67.11 das Maß 0 besitzen. Also ist einerseits

$$\lambda^n(P) = 2 - \lambda^n(H_1) - \lambda^n(H_2).$$

Andererseits geht  $H_2$  durch verschieben um  $e_1$  aus

$$W_2 = \{se_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], s \geq t_2\}$$

hervor und besitzt damit wegen der Translationsinvarianz dasselbe Volumen wie  $W_2$ . Da  $H_1 \cup W_2$  der Einheitswürfel ist, wobei der Durchschnitt wieder in einer Hyperebene liegt, ist

$$\lambda^n(H_1) + \lambda^n(H_2) = \lambda^n(H_1) + \lambda^n(W_2) = 1$$

und somit ist  $\lambda^n(P) = 1$ . □

**KOROLLAR 68.3.** *Bei einer Streckung*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor  $a \in \mathbb{R}$  gilt für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 68.2. □

**KOROLLAR 68.4.** *Eine lineare Isometrie*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist volumentreu.

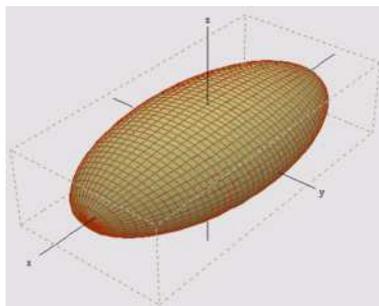
*Beweis.* Dies folgt wegen Lemma 68.1 und Satz 68.2 aus Aufgabe 68.4. □

**KOROLLAR 68.5.** *Eine Drehung*

$$D(\theta) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(die durch eine Drehmatrix  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  gegeben ist), ist flächentreu.

*Beweis.* Dies folgt wegen Lemma 68.1 und Satz 68.2 aus Satz 25.11(6). □



BEISPIEL 68.6. Ein *achsenparalleles Ellipsoid* wird im  $\mathbb{R}^3$  durch

$$E = \{(x, y, z) \mid ax^2 + by^2 + cz^2 \leq r^2\}$$

mit  $a, b, c \neq 0$  beschrieben. Es ist das Bild der Einheitskugel

$$K_3 = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$$

unter der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

also mit  $x = \frac{r}{\sqrt{a}}u$ ,  $y = \frac{r}{\sqrt{b}}v$  und  $z = \frac{r}{\sqrt{c}}w$ . Nach Satz 68.2 ist daher das Volumen dieses Ellipsoids gleich

$$\text{vol}(E) = \frac{r^3}{\sqrt{abc}} \cdot \text{vol}(K_3).$$

Das Volumen der Einheitskugel ist  $\frac{4}{3}\pi$ , siehe Beispiel 73.6.

## Volumina in euklidischen Räumen

Auf jedem reellen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  kann man ein sinnvolles Maß definieren, indem man eine Isomorphie

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

nimmt und das Bildmaß zum Borel-Lebesgue-Maß nimmt. Dieses Maß ist allerdings abhängig von der gewählten Isomorphie, bei zwei verschiedenen Isomorphismen unterscheiden sich die so gewonnenen Maße um einen skalaren Faktor. Bei euklidischen Räumen kann man aber mit Hilfe von Orthonormalbasen ein kanonisches Borel-Lebesgue-Maß definieren.

SATZ 68.7. *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß  $\lambda_V$  auf den Borelmengen von  $V$ , das jedem von einer Orthonormalbasis aufgespannten Parallelotop den Wert 1 zuweist.*

*Beweis.* Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und es sei

$$L_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

die dadurch definierte lineare Isometrie. Dann ist das Bildmaß  $L_{u*}\lambda^n$  nach Lemma 68.1 translationsinvariant und besitzt auf dem von den  $u_1, \dots, u_n$  erzeugten Parallelotop den Wert 1. Es bleibt also zu zeigen, dass dieses Maß auch jedem anderen orthonormalen Parallelotop den Wert 1 zuweist. Sei also  $v_1, \dots, v_n$  eine weitere Orthonormalbasis mit dem zugehörigen Parallelotop  $P_v$  und der zugehörigen Isometrie

$$L_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i.$$

Dann ist

$$L_u^{-1}(P_v) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(L_v^{-1}(P_v)) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(W),$$

wobei  $W$  den Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Da  $L_v^{-1} \circ L_u$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist, folgt die Aussage aus Korollar 68.4.  $\square$

Das in dieser Aussage für euklidische Vektorräume definierte Maß heißt ebenfalls *Borel-Lebesgue-Maß*.

**SATZ 68.8.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und sei  $P$  das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß  $\lambda_V$  auf  $V$*

$$\lambda_V(P) = (\det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n})^{1/2}.$$

*Beweis.* Die Positivität der Determinante der Gramschen Matrix folgt aus Korollar 47.2. Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und es sei

$$v_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k.$$

Die Spalten der Matrix  $A = (a_{kj})_{kj}$  sind also die Koeffizienten von  $v_j$  bzgl. der gegebenen Orthonormalbasis. Nach Satz 68.2 und aufgrund der Definition des Maßes  $\lambda_V$  in Satz 68.7 ist somit

$$\lambda_V(P) = |\det A|.$$

Wegen

$$\langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k, \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$$

ist

$$A^t A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}.$$

Nach Satz 15.6 ist  $\det A = \det A^t$ , so dass die Aussage sich aus Satz 15.4 ergibt.  $\square$

Die vorstehende Aussage erlaubt es, auch bei  $k < n$  das  $k$ -dimensionale Maß von  $k$ -dimensionalen Parallelotops im  $\mathbb{R}^n$  auszurechnen (ihr  $n$ -dimensionales Maß ist 0, da sie in einem echten Untervektorraum liegen). Die einfachste Situation liegt bei  $k = 1$  vor, dann handelt es sich um eine einfache Längenberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes. Ein typischeres Beispiel ist die Flächenberechnung eines Parallelogramms im  $\mathbb{R}^3$ .

BEISPIEL 68.9. Wir betrachten das von den Vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  aufgespannte Parallelogramm im  $\mathbb{R}^3$ . Nach Satz 68.8 müssen wir die Skalarprodukte dieser Vektoren berechnen. Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 13, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 21.$$

Dies führt zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante 269. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also  $\sqrt{269}$ .

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Ellipsoide.png, Autor = Benutzer Anarkman auf Commons,  
Lizenz = PD

4