

# **Mathematik III**

**Prof. Dr. Holger Brenner  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik/Informatik**

**Wintersemester 2010/2011**

## Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik III (Reelle und angewandte Analysis) wieder, die ich im Wintersemester 2010/2011 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte, die im direkten Anschluss an die einzelnen Vorlesungen öffentlich gemacht wurden. Ich habe diese Veranstaltung zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 3.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 3.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf.

Ich bedanke mich bei der Wikiversity Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen, bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und erstellte Bilder und bei Frau Marianne Gausmann für die Erstellung des Pdf-Files. Bei Daniel Brinkmann, Dr. Julio Moyano und Matthias Schulte bedanke ich mich für Vorlesungsververtretungen. Bei ihnen und bei Danny Gomez-Ramirez, Inga Heudtlass und Dr. Jan Uliczka bedanke ich mich für die Mitwirkung bei der Veranstaltung, für Korrekturen, Vorschläge und kritische Nachfragen.

Holger Brenner

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>Vorlesungen</b>	5
61. Vorlesung	5
61.1. Abzählbare Mengen	5
61.2. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen	8
62. Vorlesung	9
62.1. Mengensysteme	10
62.2. Messbare Abbildungen	13
63. Vorlesung	14
63.1. Topologische Räume	14
63.2. Borel-Mengen	16
63.3. Maße und Maßräume	17
63.4. Beispiele für diskrete Maße	18
64. Vorlesung	19
64.1. Gittermaße	19
64.2. Ausschöpfungseigenschaften	20
64.3. Der Eindeutigkeitssatz für Maße	23
64.4. Bildmaße	24
64.5. Produkt von topologischen Räumen	24
65. Vorlesung	25
65.1. Fortsetzung von äußeren Maßen	25
65.2. Existenzsätze für Maße	29
65.3. Produkt-Messräume	29
66. Vorlesung	30
66.1. Produkt-Präringe	30
66.2. Produktmaße	31
67. Vorlesung	35
67.1. Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ .	35
67.2. Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ .	36
67.3. Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes	37
68. Vorlesung	39
68.1. Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen	39

68.2.	Volumina in euklidischen Räumen	42
69.	Vorlesung	44
69.1.	Messbare numerische Funktionen	45
70.	Vorlesung	49
70.1.	Integrierbare Funktionen	49
70.2.	Die Tschebyschow-Abschätzung	53
70.3.	Bildmaße und allgemeine Transformationsformel	54
71.	Vorlesung	54
71.1.	Ausschöpfungseigenschaften	54
71.2.	Lebesgue-Integral und Riemann-Integral	56
71.3.	Linearität des Integrals	57
71.4.	Weitere Konvergenzsätze	58
72.	Vorlesung	60
72.1.	Parameterabhängige Integrale	60
72.2.	Das Cavalieri-Prinzip	63
73.	Vorlesung	65
73.1.	Einige Volumina	66
73.2.	Der Satz von Fubini	69
74.	Vorlesung	72
74.1.	Folgerungen aus dem Satz von Fubini	72
74.2.	Dichten	73
74.3.	Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen	73
74.4.	Die Transformationsformel für Quader	74
75.	Vorlesung	77
75.1.	Die Transformationsformel für Integrale	77
75.2.	Beispiele zur Transformationsformel	79
76.	Vorlesung	81
76.1.	Das Konzept einer Mannigfaltigkeit	81
76.2.	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	84
77.	Vorlesung	87
77.1.	Der Satz über implizite Abbildungen und Mannigfaltigkeiten	87
77.2.	Differenzierbare Abbildungen	88
77.3.	Differenzierbare Funktionen	90

78.	Vorlesung	92
78.1.	Der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit	92
79.	Vorlesung	98
79.1.	Abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten	98
79.2.	Das Tangentialbündel	99
80.	Vorlesung	104
80.1.	Produkte von Mannigfaltigkeiten	104
80.2.	Das Dachprodukt	106
81.	Vorlesung	109
81.1.	Eigenschaften des Dachprodukts	109
81.2.	Dachprodukte bei linearen Abbildungen	113
82.	Vorlesung	115
82.1.	Orientierungen auf reellen Vektorräumen	115
82.2.	Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten	117
82.3.	Kompaktheit	118
82.4.	Maße auf Mannigfaltigkeiten	119
83.	Vorlesung	121
83.1.	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	121
83.2.	Das Zurückziehen von Differentialformen	125
84.	Vorlesung	127
84.1.	Positive Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit	128
84.2.	Volumenformen und Orientierung	130
84.3.	Integration längs einer differenzierbaren Abbildung	131
85.	Vorlesung	133
85.1.	Riemannsche Mannigfaltigkeiten	133
85.2.	Vektorfelder und 1-Formen auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit	135
85.3.	Die kanonische Volumenform auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit	136
86.	Vorlesung	138
86.1.	Berechnungen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten	139
86.2.	Rotationsflächen	140
86.3.	Kartographie	141

87. Vorlesung	144
87.1. Die äußere Ableitung	144
87.2. Euklidische Halbräume	150
88. Vorlesung	151
88.1. Mannigfaltigkeiten mit Rand	151
88.2. Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand	155
89. Vorlesung	156
89.1. Partitionen der Eins	156
89.2. Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten und Volumenformen	161
90. Vorlesung	162
90.1. Der Satz von Stokes-Quaderversion	162
90.2. Der Satz von Stokes	163
90.3. Der Brouwersche Fixpunktsatz	166
<b>Arbeitsblätter</b>	168
61. Arbeitsblatt	168
62. Arbeitsblatt	169
63. Arbeitsblatt	172
64. Arbeitsblatt	174
65. Arbeitsblatt	176
66. Arbeitsblatt	178
67. Arbeitsblatt	180
68. Arbeitsblatt	182
69. Arbeitsblatt	185
70. Arbeitsblatt	187
71. Arbeitsblatt	188
72. Arbeitsblatt	191
73. Arbeitsblatt	193
74. Arbeitsblatt	195
75. Arbeitsblatt	197
76. Arbeitsblatt	198
77. Arbeitsblatt	200
78. Arbeitsblatt	202

79. Arbeitsblatt	204
80. Arbeitsblatt	207
81. Arbeitsblatt	209
82. Arbeitsblatt	212
83. Arbeitsblatt	214
84. Arbeitsblatt	218
85. Arbeitsblatt	221
86. Arbeitsblatt	223
87. Arbeitsblatt	225
88. Arbeitsblatt	227
89. Arbeitsblatt	230
90. Arbeitsblatt	231
Reflexionsaufgaben	234
Testklausur 1	236
Testklausur 1 mit Lösungen	240
Testklausur 2	250
Testklausur 2 mit Lösungen	254
Bildlizenzen	265
Abbildungsverzeichnis	266

## Vorlesungen

### 61. VORLESUNG

#### 61.1. Abzählbare Mengen.

Wir erinnern daran, dass zwei Mengen  $M$  und  $N$  gleichmächtig heißen, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt. Hier interessieren wir uns für sogenannte „abzählbar unendlichen“ Mengen, die in Bijektion zu den natürlichen Zahlen gebracht werden können. Dies ist nicht für alle unendlichen Mengen möglich, für die reellen Zahlen bspw. nicht. Durch den Mächtigkeitsbegriff wird eine Hierarchie in die Welt der unendlichen Mengen gebracht. Die zu den natürlichen Zahlen gleichmächtigen Mengen sind die „kleinsten“ unendlichen Mengen.

Im Rahmen der Maßtheorie für den euklidischen Raum, die wir ab der nächsten Vorlesung entwickeln werden, sind solche Mengen vernachlässigbar. Andererseits kann in der Maßtheorie über abzählbare Indexmengen sinnvoll aufsummiert werden, aber nicht über größere Indexmengen.

**Lemma 61.1.** *Es seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  $N$  ist leer oder es gibt eine surjektive Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N.$$

- (2) Es gibt eine injektive Abbildung

$$\psi : N \longrightarrow M.$$

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Wenn  $N$  leer ist, so kann man die leere Abbildung  $\emptyset \rightarrow M$  nehmen. Sei also  $N \neq \emptyset$  und sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

surjektiv. Zu jedem  $y \in N$  gibt es ein  $x \in M$  mit  $\varphi(x) = y$ . Wir wählen für jedes  $y$  ein solches  $x_y$ <sup>1</sup> aus und definieren  $\psi$  durch

$$\psi : N \longrightarrow M, y \longmapsto \psi(y) = x_y.$$

Wegen  $\varphi(\psi(y)) = y$  ist  $\psi$  injektiv. (2)  $\Rightarrow$  (1). Sei nun eine injektive Abbildung

$$\psi : N \longrightarrow M$$

gegeben. Diese induziert eine Bijektion zwischen  $N$  und dem Bild von  $\psi$ , sei  $\theta : N \rightarrow \text{Bild } \psi$  diese Abbildung. Wenn  $N$  leer ist, so sind wir fertig. Sei also  $N \neq \emptyset$  und sei  $c \in N$  ein fixiertes Element. Wir definieren

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

---

<sup>1</sup>Dass man eine solche Auswahl treffen kann beruht auf dem *Auswahlaxiom* der Mengenlehre.

durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta^{-1}(x), & \text{falls } x \in \text{bild } \psi, \\ c & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wegen  $\varphi(\theta(y)) = y$  surjektiv.  $\square$

**Definition 61.2.** Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

Nicht abzählbare Mengen nennt man im Allgemeinen *überabzählbar*. Aufgrund von Lemma 61.1 ist die Abzählbarkeit von  $M$  gleichbedeutend damit, dass es eine injektive Abbildung  $M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt. Beim Nachweis der Abzählbarkeit arbeitet man aber meistens mit der oben angegebenen Definition.

Endliche Mengen sind natürlich abzählbar. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich.

**Definition 61.3.** Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie abzählbar, aber nicht endlich ist.

**Lemma 61.4.** *Eine Menge  $M$  ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}$  und  $M$  gibt.*

*Beweis.* Es sei

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung. Wir definieren induktiv eine streng wachsende Abbildung

$$\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass  $\varphi \circ \psi$  bijektiv ist. Wir setzen  $\psi(0) = 0$  und konstruieren  $\psi$  induktiv über die Eigenschaft, dass  $\psi(n+1)$  die kleinste natürliche Zahl  $k$  ist, für die  $\varphi(k)$  nicht zu

$$\{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \dots, \varphi(\psi(n))\}$$

gehört. Eine solche Zahl gibt es immer, da andernfalls  $M$  endlich wäre, also gibt es auch eine kleinste solche Zahl. Nach Konstruktion ist  $\psi(n+1) > \psi(n)$ , d.h.  $\psi$  ist streng wachsend. Da jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Eigenschaft

$$\varphi(\psi(n+1)) \notin \{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \dots, \varphi(\psi(n))\}$$

erfüllt, ist die Gesamtabbildung  $\varphi \circ \psi$  injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei  $m \in M$ . Wegen der Surjektivität von  $\varphi$  ist die Faser  $\varphi^{-1}(m)$  nicht leer und daher gibt es auch ein kleinstes Element  $a \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi(a) = m$ . Da  $\psi$  streng wachsend ist, gibt es nur endlich viele Zahlen  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  mit  $\psi(i) < a$ . Daher ist  $\psi(n+1) = a$  und  $\varphi(\psi(n+1)) = \varphi(a) = m$ .  $\square$

D.h. insbesondere, dass alle abzählbar unendlichen Mengen gleichmächtig sind.

**Lemma 61.5.** *Seien  $M_1$  und  $M_2$  abzählbare Mengen. Dann ist auch die Produktmenge  $M_1 \times M_2$  abzählbar. Insbesondere ist das Produkt  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar.*

*Beweis.* Wir beweisen zuerst den Zusatz. Die Abbildung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (k, \ell) \longmapsto 2^k(2\ell + 1),$$

ist injektiv, da für jede positive natürliche Zahl  $n$  die Zweierpotenz  $2^k$ , die sie teilt, und der ungerade komplementäre Teiler eindeutig bestimmt sind (das Bild der Abbildung ist  $\mathbb{N}_+$ ). Daher ist die Produktmenge nach Lemma 61.1 abzählbar. Für den allgemeinen Fall seien abzählbare Mengen  $M_1$  und  $M_2$  gegeben. Wenn eine davon leer ist, so ist auch die Produktmenge leer und somit abzählbar. Seien also  $M_1$  und  $M_2$  nicht leer und seien  $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow M_1$  und  $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow M_2$  zwei surjektive Abbildungen. Dann ist auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow M_1 \times M_2$$

surjektiv. Nach der Vorüberlegung gibt es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

so dass es insgesamt eine surjektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow M_1 \times M_2$  gibt.  $\square$

**Lemma 61.6.** *Es sei  $I$  eine abzählbare Indexmenge und zu jedem  $i \in I$  sei  $M_i$  eine abzählbare Menge. Dann ist auch die (disjunkte) Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} M_i$  abzählbar.*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass sämtliche  $M_i$  nicht leer sind. Es gibt dann surjektive Abbildungen

$$\varphi_i : \mathbb{N} \longrightarrow M_i.$$

Daraus konstruieren wir die Abbildung

$$\varphi : I \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i, (i, n) \longmapsto \varphi_i(n),$$

die offensichtlich surjektiv ist. Nach Lemma 61.5 ist die Produktmenge  $I \times \mathbb{N}$  abzählbar, also gilt das auch für das Bild unter  $\varphi$ , und dieses ist die Vereinigung.  $\square$

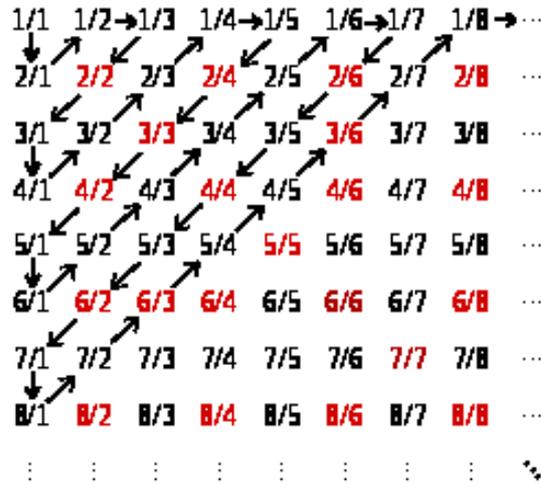
Wir ziehen einige wichtige Konsequenzen über die Abzählbarkeit von Zahlbereichen. Man beachte, dass die natürlichen Inklusionen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  nicht bijektiv sind. Die Bijektionen, die es zwischen  $\mathbb{N}$  einerseits und  $\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Q}$  andererseits aufgrund der folgenden Aussagen gibt, respektieren nicht die Rechenoperationen.

**Lemma 61.7.** *Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar.*

---

<sup>2</sup>Wenn die  $M_i$  Teilmengen einer festen Obermenge sind, so ist die Vereinigung in dieser Menge zu nehmen und im Allgemeinen nicht disjunkt. Wenn es sich um Mengen handelt, die nichts miteinander zu tun haben, so ist mit Vereinigung die disjunkte Vereinigung gemeint.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 61.1. □



Die Abzählbarkeit der positiven rationalen Zahlen.

**Satz 61.8.** *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 61.2. □

## 61.2. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.

**Satz 61.9.** *Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar.*

*Beweis.* Nehmen wir an, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar, dann ist insbesondere auch das Einheitsintervall  $[0, 1[$  abzählbar. Sei also

$$\psi : \mathbb{N}_+ \longrightarrow [0, 1[$$

eine surjektive Abbildung. Wir betrachten die reellen Zahlen als Zifferenfolgen im Dreiersystem: jede reelle Zahl  $r \in [0, 1[$  besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung als Potenzreihe

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(r) 3^{-k},$$

wobei die  $k$ -te Nachkommaziffer  $z_k(r) \in \{0, 1, 2\}$  ist und wobei nicht fast alle Ziffern gleich 2 sind (sonst hätte man keine Eindeutigkeit). Wir definieren nun eine reelle Zahl durch  $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k}$  mit

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } (\psi(k))_k = 1 \text{ oder } 2 \\ 1, & \text{falls } (\psi(k))_k = 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Zahl  $s$  nicht in der Aufzählung  $\psi$  vorkommt. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist nämlich  $\psi(k) \neq s$ , da  $\psi(k)$  sich nach Konstruktion von  $s$  an der  $k$ -ten Nachkommastelle unterscheidet. Also ist  $\psi$  doch nicht surjektiv. □

Kurt Gödel bewies 1938, dass die Hinzunahme der Kontinuumshypothese zur Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre einschließlich Auswahlaxiom (ZFC) diese nicht widersprüchlich macht. Man kann aber nicht beweisen, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Auch das hat Gödel bewiesen.



**Bemerkung 61.10.** Ist jede überabzählbare Menge  $T \subseteq \mathbb{R}$  gleichmächtig zu  $\mathbb{R}$ ? Die *Kontinuumshypothese* behauptet, dass dies gilt. Diese Frage berührt die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik; es hängt nämlich von der gewählten Mengenlehre ab, ob dies gilt oder nicht, man kann es sich also aussuchen. Anders als beim *Auswahlaxiom*, ohne dessen Akzeptanz eine Vielzahl von mathematischen Schlüssen nicht möglich wäre und die Mathematik ziemlich anders aussehen würde, ist es für praktische Zwecke unerheblich, wofür man sich entscheidet.

Mit einem ähnlichen (Diagonal)-Argument wie im Beweis zu Satz 61.9 kann man zeigen, dass die Potenzmenge einer Menge stets eine größere Mächtigkeit als die Menge besitzt.

**Satz 61.11.** *Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathfrak{P}(M)$  ihre Potenzmenge. Dann besitzt  $\mathfrak{P}(M)$  eine größere Mächtigkeit als  $M$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F : M \longrightarrow \mathfrak{P}(M), x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M \mid x \notin F(x)\}.$$

Da dies eine Teilmenge von  $M$  ist, muss es wegen der Surjektivität ein  $y \in M$  geben mit

$$F(y) = T.$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich  $y \in F(y)$  oder  $y \notin F(y)$ . Im ersten Fall ist also  $y \in T$ , und damit, nach der Definition von  $T$ , auch  $y \notin F(y)$ , Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von  $T$ ,  $y \in T$ , und das ist ebenfalls ein Widerspruch.  $\square$

## 62. VORLESUNG

In diesem Kurs beschäftigen wir uns mit dem „Flächeninhalt“ von ebenen Gebilden und den Volumina von räumlichen Gebilden. Für ein Rechteck setzt

man den Inhalt als Produkt der beiden Seiten und für einen Quader als Produkt von Breite, Länge und Höhe an. Die durch den Graphen einer stetigen Funktionen, der  $x$ -Achse und zwei dazu senkrechten Geraden eingeschlossene Fläche wird über das Riemann-Integral ein Inhalt zugeordnet. Die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen, des Kreises, der Volumina von Pyramiden, Kegeln und der Kugel sind klassische Themen der Mathematik. Eine intuitive Vorstellung, die die Existenz eines sinnvollen Volumenbegriffs nahelegt, ist, dass wenn man den Körper „wasserdicht“ in eine Flüssigkeit in einem quaderförmigen Becken ganz untertaucht, dass dann das Volumen sich als Grundfläche des Beckens mal gestiegenem Wasserstand errechnet. Für Flächen kann man sich vorstellen, dass man die ebenen Figuren ausmalt und der Flächeninhalt proportional zur verwendeten Farbe sein muss, die ihrerseits wiederum proportional zum Höhengswund im Farbeimer ist. Doch das sind nur Gedankenexperimente, die einen sinnvollen Maßbegriff erahnen lassen, keinesfalls zufriedenstellende Begründungen.



Wir werden im Folgenden die *Maßtheorie* einschließlich der Integrationstheorie entwickeln. Dabei werden insbesondere folgende Fragestellungen betrachten.

- Was ist ein Maß (ein Flächeninhalt, ein Volumen)?
- Welchen Mengen kann man ein Maß zuordnen? Allen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ ?
- Welches Volumen hat der  $\mathbb{R}^n$ ?
- Welche Rechenregeln gelten für das Volumen?
- Welche Möglichkeiten gibt es, die Volumina zu berechnen?

Die ersten beiden Fragen erweisen sich schon dann als nicht trivial, wenn man ein Rechteck betrachtet. Macht es bspw. einen Unterschied, ob man ein Rechteck mit oder ohne seinem Rand betrachtet? Ändert sich der Inhalt, wenn ich einen Punkt aus dem Inneren herausnehme? Besitzt das „rationale Rechteck“, das nur aus den Punkten des Rechtecks mit rationalen Koordinaten besteht, einen sinnvollen Flächeninhalt? Wie sieht es mit dem „irrationalen Rechteck“ aus? Ist die Summe dieser beiden Flächeninhalte, vorausgesetzt, dass sie existieren, gleich dem Rechtecksinhalt?

### 62.1. Mengensysteme.

Es ist nicht möglich, für beliebige Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ein sinnvolles Maß zu definieren. Stattdessen sucht man nach einer möglichst großen Auswahl von

Teilmengen, für die ein Maß definiert werden kann. Um über solche Mengensysteme und ihre strukturellen Eigenschaften reden zu können, brauchen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 62.1.** Zu einer Menge  $M$  heißt eine Teilmenge  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$  der Potenzmenge ein (Teil)-*Mengensystem* auf  $M$ .

**Definition 62.2.** Ein Teilmengensystem  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $M$  heißt *Mengen-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $M \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $T \in \mathcal{A}$  gehört auch das Komplement  $M \setminus T$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für je zwei Mengen  $S, T \in \mathcal{A}$  ist auch  $S \cup T \in \mathcal{A}$ .

Statt Mengenalgebra sagt man auch *Mengenring*, doch ist das missverständlich, da auch die weiter unten definierten *Mengen-Präringe* manchmal Mengerringe genannt werden.

Für die Maßtheorie ist das folgende Konzept am wichtigsten.

**Definition 62.3.** Ein Teilmengensystem  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $M$  heißt  $\sigma$ -*Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $M \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $T \in \mathcal{A}$  gehört auch das Komplement  $M \setminus T$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für jede abzählbare Familie  $T_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in I$ , ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

Eine  $\sigma$ -Algebra ist also eine Mengenalgebra, die nicht nur unter endlichen Vereinigungen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Sie ist im Allgemeinen nicht unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen. Die trivialen Beispiele für eine  $\sigma$ -Algebra sind die Potenzmenge und das Mengensystem  $\{\emptyset, M\}$ . Die Elemente aus der  $\sigma$ -Algebra, also die Teilmengen von  $M$ , die zu  $\mathcal{A}$  gehören, nennt man auch einfach *messbare Mengen*. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man von *Ereignissen*. Zu einer Teilmenge  $A \subseteq M$  heißt die aus  $\emptyset, A, M \setminus A, M$  bestehende  $\sigma$ -Algebra die *Ereignisalgebra* zu  $A$ .

**Definition 62.4.** Eine Menge  $M$ , auf der eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  erklärt ist, heißt ein *Messraum*.

**Lemma 62.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $M$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $S, T \in \mathcal{A}$  gehört auch  $T \setminus S$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für jede abzählbare Familie  $T_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in I$ , ist auch

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 62.5. □

**Bemerkung 62.6.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es sei  $A_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Folge von messbaren Teilmengen. Dann sind auch die Mengen

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{k \geq n} A_k \right)$$

messbar, da in beiden Fällen die inneren Mengen messbar sind und damit auch die Gesamtmenge messbar ist. Diese Mengen nennt man auch den *Limes inferior* und den *Limes superior* der Mengenfolge. Die erste Menge besteht dabei aus allen Elementen aus  $M$ , die in unendlich vielen der  $A_n$  enthalten sind, und die zweite Menge aus allen Elementen aus  $M$ , die in fast allen der  $A_n$  enthalten sind

**Lemma 62.7.** Sei  $M$  eine Menge und sei  $\mathcal{A}_j, j \in J$ , eine beliebige Familie von  $\sigma$ -Algebren auf  $M$ . Dann ist auch der Durchschnitt

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 62.6. □

Aufgrund diesen Lemmas gibt es zu jeder Teilmenge  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$  eine kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{E}$  umfasst, nämlich der Durchschnitt über alle  $\mathcal{E}$ -umfassenden  $\sigma$ -Algebren.

**Definition 62.8.** Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$  eine Menge von Teilmengen aus  $M$ . Dann nennt man die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{E}$  enthält, die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Das System  $\mathcal{E}$  heißt *Erzeugendensystem* dieser  $\sigma$ -Algebra.

Die folgenden Mengensysteme spielen in Beweisen eine wichtige Rolle.

**Definition 62.9.** Ein Teilmengensystem  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $M$  heißt *Dynkin-System*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $M \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $S, T \in \mathcal{A}$  und  $S \subseteq T$  gehört auch  $T \setminus S$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für jede abzählbare Familie  $T_i \in \mathcal{A}, i \in I$ , mit paarweise disjunkten Mengen  $T_i$  ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

**Lemma 62.10.** Sei  $M$  eine Menge. Für ein Mengensystem  $\mathcal{A}$  auf  $M$  sind äquivalent.

- (1)  $\mathcal{A}$  ist ein durchschnittsstabiles Dynkin-System
- (2)  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 62.7. □

Da der Durchschnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, gibt es zu jedem Mengensystem ein davon erzeugtes Dynkin-System.

**Lemma 62.11.** *Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{E}$  ein durchschnittsstabiles Mengensystem auf  $M$ . Dann stimmt das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System mit der von  $\mathcal{E}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra überein.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Dazu genügt es aufgrund von Lemma 62.10 zu zeigen, dass  $\mathcal{D}$  durchschnittsstabil ist. Zu einer Teilmenge  $T \subseteq M$  mit  $T \in \mathcal{D}$  betrachten wir das Mengensystem

$$\mathcal{D}_T = \{S \in \mathcal{D} \mid T \cap S \in \mathcal{D}\}.$$

Wir müssen  $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$  zeigen, denn dies bedeutet die Durchschnittsstabilität. Eine direkte Überlegung zeigt, dass  $\mathcal{D}_T$  ebenfalls ein Dynkin-System ist. Für  $E \in \mathcal{E}$  gilt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ , da  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist. Daher ist  $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}$  für alle  $E \in \mathcal{E}$ . Dann ist aber auch  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_T$  für alle  $T \in \mathcal{D}$  und somit generell  $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$ . □

**Definition 62.12.** Ein Teilmengensystem  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $M$  heißt *Mengen-Präring*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $S, T \in \mathcal{A}$  gehört auch  $S \setminus T$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für je zwei Mengen  $S, T \in \mathcal{A}$  ist auch  $S \cup T \in \mathcal{A}$ .

## 62.2. Messbare Abbildungen.

**Definition 62.13.** Es seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei Messräume. Eine Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

heißt *messbar* (oder genauer  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar), wenn für jede Teilmenge  $T \subseteq N$  mit  $T \in \mathcal{B}$  das Urbild  $\varphi^{-1}(T)$  zu  $\mathcal{A}$  gehört.

**Lemma 62.14.** *Für messbare Abbildungen gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1) Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.
- (2) Jede konstante Abbildung ist messbar.
- (3) Die Identität ist messbar.
- (4) Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $M$ . Dann ist die Identität auf  $M$  genau dann  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn  $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$  gilt.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 62.8. □

**Lemma 62.15.** *Es seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei Messräume und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine Abbildung. Es sei  $\mathcal{E}$  ein Erzeugendensystem für  $\mathcal{B}$ . Dann ist  $\varphi$  bereits dann messbar, wenn für jede Teilmenge  $T \subseteq N$  mit  $T \in \mathcal{E}$  das Urbild  $\varphi^{-1}(T)$  zu  $\mathcal{A}$  gehört.*

*Beweis.* Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{C} = \{T \subseteq N \mid \varphi^{-1}(T) \in \mathcal{A}\}.$$

Da das Urbildnehmen mit sämtlichen Mengenoperationen verträglich ist, ist  $\mathcal{C}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Da diese das Erzeugendensystem  $\mathcal{E}$  umfasst, ist  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ .  $\square$

## 63. VORLESUNG

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage, welchen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  man ein sinnvolles Volumen zuordnen kann. Es wird sich herausstellen, dass diese „messbaren Mengen“ eine  $\sigma$ -Algebra bilden, nämlich die  $\sigma$ -Algebra der *Borel-Mengen*. Diese ist zwar sehr groß, und zwar gehören nahezu alle irgendwie „kohärent beschreibbaren“ Teilmengen dazu, aber eben doch nicht alle. Die Borel-Mengen explizit zu beschreiben, ist nicht möglich, stattdessen gibt man ein einfaches Erzeugendensystem für diese  $\sigma$ -Algebra an, nämlich die Menge aller offenen Teilmengen des euklidischen Raumes. Es empfiehlt sich, diese Konstruktion sofort für topologische Räume durchzuführen.

### 63.1. Topologische Räume.

Die Menge der offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , oder allgemeiner eines metrischen Raumes, bilden ein Mengensystem, das eine Topologie im Sinne der folgenden Definition ist.

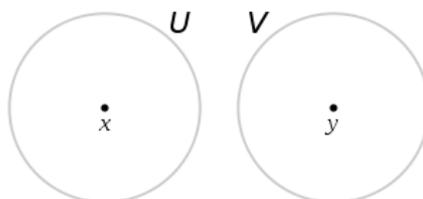
**Definition 63.1.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$  heißt *Topologie* auf  $X$ , wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (1) Es ist  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $X \in \mathcal{T}$ .
- (2) Sind  $U \in \mathcal{T}$  und  $V \in \mathcal{T}$ , so ist auch  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- (3) Ist  $I$  eine Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I$ , so ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  ist.

Die Teilmengen von  $X$ , die zu  $\mathcal{T}$  gehören, heißen *offene Mengen*. Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist, also zur Topologie gehört.

**Definition 63.2.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  zwei offene Mengen  $U$  und  $V$  gibt mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .



**Definition 63.3.** Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{C}$  von offenen Mengen in  $X$  heißt *Basis der Topologie*, wenn man jede offene Menge in  $\mathcal{T}$  als Vereinigung von offenen Mengen aus  $\mathcal{C}$  erhalten kann.

**Definition 63.4.** Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Man sagt, dass  $X$  eine *abzählbare Basis* besitzt, wenn es eine Basis der Topologie gibt, die nur aus abzählbar vielen offenen Mengen besteht.

Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es überabzählbar viele offene Mengen, es gibt aber eine abzählbare Basis, nämlich alle offenen Bälle  $U(P, r)$ , deren Mittelpunktskoordinaten und deren Radien rationale Zahlen sind.

**Definition 63.5.** Eine Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt *stetig*, wenn Urbilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Diese Definition stimmt wegen Satz 20.3 mit der Definition für metrische Räume überein.

**Definition 63.6.** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

gibt, deren Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

**Definition 63.7.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge. Folgende Vorschrift definiert eine Topologie  $\mathcal{T}_Y$  auf  $Y$ : Für eine Teilmenge  $U \subseteq Y$  gilt  $U \in \mathcal{T}_Y$  genau dann, wenn es eine in  $X$  offene Menge  $V \in \mathcal{T}$  gibt, so dass  $V \cap Y = U$  gilt. Es lässt sich leicht nachweisen, dass  $\mathcal{T}_Y$  eine Topologie ist. Sie heißt *Unterraumtopologie* (oder *induzierte Topologie*), und der topologische Raum  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt ein *Unterraum* von  $(X, \mathcal{T})$ .

## 63.2. Borel-Mengen.

**Definition 63.8.** Sei  $(M, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann nennt man die von  $\mathcal{T}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen* von  $M$ .

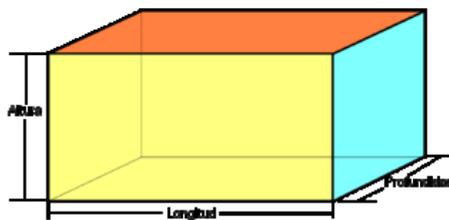
Insbesondere nennt man im  $\mathbb{R}^n$  die durch die Topologie zur euklidischen Metrik definierte  $\sigma$ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen*. Dies ist ein extrem reichhaltiger Begriff; es ist nämlich gar nicht einfach, eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  anzugeben, die keine Borel-Menge ist.

**Lemma 63.9.** *Die folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind Borel-Mengen.*

- (1) *Alle offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .*
- (2) *Alle abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .*
- (3) *Alle abzählbaren Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .*
- (4) *Alle abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  und alle offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$ .*
- (5) *Alle abgeschlossenen Quader  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  und alle offenen Quader  $]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$ .*

*Beweis.* (1) folgt aus der Definition der Borel-Mengen. (2) folgt aus (1), da eine  $\sigma$ -Algebra mit einer Menge auch stets deren Komplement enthält, und die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind. (3). Einpunktige Mengen im  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen und daher Borel-Mengen. Damit ist auch jede abzählbare Punktmenge als eine abzählbare Vereinigung von einpunktigen Teilmengen eine Borel-Menge. (4) und (5) sind Spezialfälle von (1) und (2).  $\square$

Wie gesagt, Borel-Mengen sind ein recht umfassender Begriff. Andererseits wird die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen bereits durch die Menge aller Quader erzeugt, also durch diejenigen Teilmengen, für die unmittelbar ein sinnvoller Volumenbegriff existiert.



**Lemma 63.10.** *Die Menge der Borel-Mengen im  $\mathbb{R}^n$  stimmt mit der von der Menge aller offenen Quader erzeugten  $\sigma$ -Algebra überein. Dabei kann man sich sogar auf die Menge der offenen Quader mit rationalen Eckpunkten beschränken.*

*Beweis.* Wir beweisen den Zusatz. Es genügt zu zeigen, dass jede offene Menge im  $\mathbb{R}^n$  sich als eine abzählbare Vereinigung von achsenparallelen offenen

Quadern mit rationalen Eckpunkten schreiben lässt. Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, ist auch die Menge aller Quader mit rationalen Ecken abzählbar. Wir müssen daher nur zeigen, dass jede offene Menge eine Vereinigung von offenen Quadern mit rationalen Ecken ist. Sei dazu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $x \in U$  ein Punkt. Daher gibt es ein  $\epsilon > 0$ , das wir rational wählen können, mit

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Jede Koordinate  $x_i$  ist eine reelle Zahl, und damit der Limes einer Folge von rationalen Zahlen. Sei

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$$

mit

$$d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3n}.$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ . Damit ist einerseits

$$x \in Q = ]y_1 - \frac{\epsilon}{3n}, y_1 + \frac{\epsilon}{3n}[ \times \dots \times ]y_n - \frac{\epsilon}{3n}, y_n + \frac{\epsilon}{3n}[$$

und andererseits gilt für  $z \in Q$  die Beziehung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

also  $z \in U(x, \epsilon)$ . Damit ist  $x \in Q \subseteq U(x, \epsilon) \subseteq U$ . Die Vereinigung dieser so konstruierten Quader ist genau  $U$ .  $\square$

**Lemma 63.11.** *Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume, die wir als Messräume mit den zugehörigen  $\sigma$ -Algebren der Borelmengen auffassen. Dann ist jede stetige Abbildung*

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

*messbar.*

*Beweis.* Nach Definition bedeutet die Stetigkeit, dass das Urbild  $\varphi^{-1}(V)$  von jeder offenen Menge  $V \subseteq Y$  offen in  $X$  ist. Nach Definition ist das Mengensystem der offenen Mengen einer Topologie ein Erzeugendensystem für die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen. Nach Lemma 62.13 ist somit  $\varphi$  messbar.  $\square$

### 63.3. Maße und Maßräume.

In der Praxis gibt man einen Flächeninhalt in Quadratmeter  $m^2$  und ein Volumen in Kubikmeter  $m^3$  an. Diese Einheiten legen die Skala fest, auf der dann mit nichtnegativen reellen Zahlen gemessen wird. Als Wertemenge für ein Maß bieten sich demnach die nichtnegativen reellen Zahlen an. Besitzt der Gesamttraum  $\mathbb{R}^3$  ein Volumen? Sicherlich keines, das durch eine reelle Zahl ausgedrückt werden könnte. Daher erlaubt man bei einem Maß auch den Wert  $\infty$ , und setzt

$$\overline{\mathbb{R}}_{\geq} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \text{ und } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Das bedeutet nicht, dass wir die reellen Zahlen ändern, sondern dass wir im maßtheoretischen Kontext mit einer bestimmten Mengenerweiterung der reellen Zahlen arbeiten. Einen Teil der Rechenoperationen dehnen wir auf die zusätzlichen Symbole aus, aber nicht alles, wobei man sich von der maßtheoretischen Zweckmäßigkeit leiten lässt. Die Ordnungsrelation wird durch

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl  $r$  ausgedehnt. Wir setzen

$$r + \infty = \infty \text{ und } r - \infty = -\infty$$

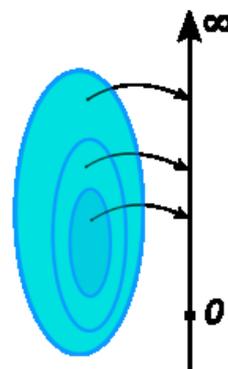
für  $r \in \mathbb{R}$ . Der Ausdruck  $\infty + (-\infty)$  ist nicht definiert. Für positive reelle Zahlen ist  $r \cdot \infty = \infty$ , und wir setzen  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Definition 63.12.** Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{P}$  ein Mengen-Präring auf  $M$ . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *Prämaß* auf  $M$ , wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen  $T_i, i \in I$ , aus  $\mathcal{P}$ , für die  $\bigcup_{i \in I} T_i$  ebenfalls zu  $\mathcal{P}$  gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$



**Definition 63.13.** Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ . Ein Prämaß auf  $M$  nennt man ein *Maß*.

Ein Maß unterscheidet sich also von einem Prämaß nicht durch die strukturellen Eigenschaften, sondern lediglich durch Eigenschaften des Definitionsbereiches. Letztlich ist man an Maßen interessiert, doch Prämaße sind für deren Konstruktion wichtige Zwischenschritte.

**Definition 63.14.** Eine Menge  $M$ , auf der eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und ein Maß

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

erklärt ist, heißt ein *Maßraum*. Man schreibt dafür kurz  $(M, \mathcal{A}, \mu)$ .

Mit der folgenden Definition ist die Wahrscheinlichkeitstheorie ein Spezialfall der Maßtheorie.

**Definition 63.15.** Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  mit  $\mu(M) = 1$ .

#### 63.4. Beispiele für diskrete Maße.

Wir besprechen kurz einige „diskrete Maße“. Das für uns wichtigste Maß, das *Borel-Lebesgue-Maß* auf dem  $\mathbb{R}^n$ , ist kein diskretes Maß, sondern ein „stetiges Maß“.

**Beispiel 63.16.** Es sei  $M$  eine Menge und es sei

$$b : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto b_x,$$

eine Funktion, die wir *Belegungsfunktion* nennen. Dann wird für jede Teilmenge  $T \subseteq M$  durch die Zuordnung

$$\beta(T) := \sum_{x \in T} b_x$$

ein Maß auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  definiert. Dabei ist die Summe als der Grenzwert zu interpretieren, falls die Familie  $b_x$ ,  $x \in T$ , summierbar ist, und andernfalls als  $\infty$ . Dass es sich dabei um ein Maß handelt folgt aus dem großen Umordnungssatz, und zwar gilt die Summationseigenschaft sogar für beliebige disjunkte Vereinigungen, nicht nur für abzählbare. Wenn die Belegungsfunktion für jedes  $x$  einen positiven Wert annimmt, so folgt aus Aufgabe 61.11, dass das Maß jeder überabzählbaren Menge den Wert  $\infty$  zuweist. Wenn andererseits die Belegungsfunktion für jedes  $x$  den Wert 0 annimmt, so liegt das *Nullmaß* vor, d.h. jede Menge hat das Maß 0. Insbesondere kann man über diesen Weg kein Maß auf  $\mathbb{R}$  gewinnen, das zugleich dem Einheitsintervall den Wert 1 und jedem einzelnen Punkt das gleiche Maß zuweist.

Von diesen *Summationsmaßen* bekommen wiederum einige einen eigenen Namen.

**Definition 63.17.** Auf einer Menge  $M$  nennt man das auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  durch

$$z(T) = \begin{cases} \#(T), & \text{falls } T \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß das *Zählmaß* auf  $M$ .

Das Zählmaß ist das Summationsmaß zur konstanten Belegungsfunktion  $b = 1$ . In den folgenden Beispielen besitzen nicht alle Punkte dasselbe Maß.

**Definition 63.18.** Es sei  $M$  eine Menge und  $x \in M$  ein Punkt. Das auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  durch

$$\delta_x(T) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß heißt das im Punkt  $x$  konzentrierte *Dirac-Maß* auf  $M$ .

## 64. VORLESUNG

### 64.1. Gittermaße.

Als weiteres diskretes Maß besprechen wir Gittermaße.

**Definition 64.1.** Sei  $\epsilon > 0$ . Die Menge

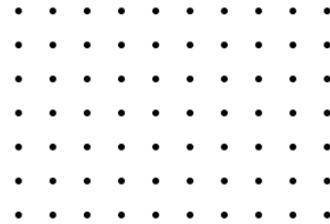
$$\Gamma_\epsilon = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nennt man das *Gitter* zum Gitterabstand  $\epsilon$ . Das durch

$$\mu_\epsilon(T) = \epsilon^n \cdot \#(T \cap \Gamma_\epsilon)$$

definierte Maß auf  $\mathbb{R}^n$  heißt das *Gittermaß* zum Gitterabstand  $\epsilon$ .

Ein Gittermaß weist nur den Gitterpunkten ein positives Maß zu. Wenn der Gitterabstand hinreichend klein ist, liefert das Gittermaß eine gute Approximation für den Inhalt für Figuren, die nicht allzu kompliziert sind.



Pointillismus: Der Flächeninhalt (auf dem Bild) der hellgrünen Rasenfläche entspricht in etwa der Anzahl der hellgrünen Farbtupfer, der Anzahl der hellgrünen Pixels und der Anzahl der hellgrünen Synapsen.



## 64.2. Ausschöpfungseigenschaften.

**Definition 64.2.** Sei  $M$  eine Menge und sei  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge von Teilmengen in  $M$  mit  $T_n \subseteq T_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei  $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ . Dann sagt man, dass diese Folge eine *Ausschöpfung* von  $T$  bildet (oder  $T$  ausschöpft), und schreibt dafür  $T_n \uparrow T$ .

**Definition 64.3.** Sei  $M$  eine Menge und sei  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge von Teilmengen in  $M$  mit  $T_n \supseteq T_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei  $T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ . Dann sagt man, dass diese Folge eine *Schrumpfung* von  $T$  bildet (oder gegen  $T$  schrumpft), und schreibt dafür  $T_n \downarrow T$ .

Bei einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  gehört mit einer jeden solchen auf- oder absteigenden Folge von Teilmengen  $T_n$  auch die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zu  $\mathcal{A}$ .

Wir fassen einige Rechenregeln für Prämaße zusammen.

**Lemma 64.4.** *Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$  und  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathcal{P}$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist  $\mu(\emptyset) = 0$ .*
- (2) *Für Mengen  $S, T \in \mathcal{P}$  mit  $S \subseteq T$  gilt  $\mu(T) = \mu(S) + \mu(T \setminus S)$ . Insbesondere ist ein Prämaß monoton.*
- (3) *Für Mengen  $S, T \in \mathcal{P}$  gilt  $\mu(T \cup S) = \mu(S) + \mu(T) - \mu(S \cap T)$ .*

(4) Seien  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $T$  aus  $\mathcal{P}$  mit  $T \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ .<sup>3</sup> Dann gilt

$$\mu(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n).$$

(5) Sei  $T_n \uparrow T$  eine Ausschöpfung in  $\mathcal{P}$ . Dann ist

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton wachsend ist.

(6) Sei  $T_n \downarrow T$  eine Schrumpfung in  $\mathcal{P}$  und sei  $\mu(T_0) < \infty$  vorausgesetzt. Dann ist

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton fallend ist.

*Beweis.* (1) ist in der Definition von Prämaß enthalten, da die leere Summe als 0 definiert ist. Man kann auch die (disjunkte) Mengenfamilie, bei der die leere Menge doppelt genommen wird, nehmen, und erhält  $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = 2\mu(\emptyset)$ , woraus  $\mu(\emptyset) = 0$  folgt. (2) folgt direkt aus der Definition, da  $T$  die disjunkte Vereinigung aus  $S$  und  $T \setminus S$  ist. (3) folgt daraus, dass  $S \cup T$  die disjunkte Vereinigung aus den drei Mengen  $S \setminus T$ ,  $T \setminus S$  und  $S \cap T$  ist. (4). Wir verwenden den folgenden Standardtrick: Wir schreiben  $S_n = T_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i)$ . Dann gilt offensichtlich  $\bigcup_{i=0}^n T_i = \bigcup_{i=0}^n S_i$  für alle  $n$ , wobei die Vereinigung der  $S_i$  jeweils disjunkt ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n\right)\right) \\ &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T \cap S_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T \cap S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T_n). \end{aligned}$$

(5). Wir schreiben die einzelnen Teilmengen  $T_n$  als disjunkte Vereinigung mittels  $S_0 = T_0$  und  $S_n = T_n \setminus T_{n-1}$ . Damit ist

$$T_n = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n,$$

---

<sup>3</sup>Man sagt, dass die  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Überpflasterung von  $T$  bilden.

und da dies eine disjunkte Vereinigung ist, gilt  $\mu(T_n) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i)$ . Daher gilt

$$\mu(T) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \mu(S_i)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n).$$

(6) Wir setzen  $S_n = T_0 \setminus T_n$ . Da  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine absteigende Folge ist, ist  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine aufsteigende Folge, und zwar gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T_0 \setminus T_n) = T_0 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) = T_0 \setminus T.$$

Daher gilt

$$\mu(T_0 \setminus T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_0 \setminus T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(T_0) - \mu(T_n)) = \mu(T_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n)$$

nach Teil (5). Somit ist (da  $\mu(T_0) < \infty$  ist)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = \mu(T_0) - \mu(T_0 \setminus T) = \mu(T).$$

□

**Definition 64.5.** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf  $M$ . Dann heißt  $\mu$  *endlich*, wenn

$$\mu(T) < \infty$$

für alle  $T \in \mathcal{P}$  ist.

Wenn die Gesamtmenge  $M$  zu  $\mathcal{P}$  gehört, so ergibt sich die Endlichkeit des Prämaßes sofort aus der Bedingung  $\mu(M) < \infty$  aufgrund der Monotonie.

Für die Maßtheorie des euklidischen Raumes ist dieser Begriff zu stark, da ja der  $\mathbb{R}^n$  kein endliches Volumen hat. Aber immerhin kann man den  $\mathbb{R}^n$  durch die abzählbar vielen Kugeln  $B(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , die selbst endliches Volumen haben, ausschöpfen. Diese Eigenschaft wird durch folgende Definition präzisiert.

**Definition 64.6.** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf  $M$ . Dann heißt  $\mu$   *$\sigma$ -endlich*, wenn man  $M$  als eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen  $M_i$  aus  $\mathcal{P}$  mit

$$\mu(M_i) < \infty$$

schreiben kann.

### 64.3. Der Eindeutigkeitsatz für Maße.

**Satz 64.7.** *Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es sei  $\mathcal{E}$  ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für  $\mathcal{A}$ . Es seien  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zwei Maße auf  $(M, \mathcal{A})$ , die auf  $\mathcal{E}$  übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung  $M_n \uparrow M$  mit  $M_n \in \mathcal{E}$  und mit  $\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty$ . Dann ist*

$$\mu_1 = \mu_2.$$

*Beweis.* Für jede messbare Menge  $T \in \mathcal{A}$  ist  $(T \cap M_n) \uparrow T$  eine Ausschöpfung von  $T$ , so dass es nach Lemma 64.4(5) genügt, die Gleichheit

$$\mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)$$

für alle  $T \in \mathcal{A}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  zu zeigen. Sei  $n$  fixiert. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{D}_n = \{T \in \mathcal{A} \mid \mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)\}$$

und wir wollen zeigen, dass dies ganz  $\mathcal{A}$  ist. Da  $\mathcal{E}$  durchschnittstabil ist, gehört nach Voraussetzung jede Menge  $E \in \mathcal{E}$  zu  $\mathcal{D}_n$ . Wir behaupten, dass  $\mathcal{E}$  ein Dynkin-System ist. Offenbar ist  $M \in \mathcal{D}_n$ . Seien  $S \subseteq T$  Teilmengen, die zu  $\mathcal{D}_n$  gehören. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1((T \setminus S) \cap M_n) &= \mu_1((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_1(T \cap M_n) - \mu_1(S \cap M_n) \\ &= \mu_2(T \cap M_n) - \mu_2(S \cap M_n) \\ &= \mu_2((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_2((T \setminus S) \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch  $T \setminus S$  zu  $\mathcal{D}_n$  gehört. Sei schließlich  $T_i, i \in I$ , eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Teilmengen aus  $\mathcal{D}_n$ , und sei  $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1(T \cap M_n) &= \mu_1\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_1(T_i \cap M_n) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_2(T_i \cap M_n) \\ &= \mu_2\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \mu_2(T \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch  $T$  zu  $\mathcal{D}_n$  gehört. Damit ist  $\mathcal{D}_n$  ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem  $\mathcal{E}$  enthält. Nach Lemma 62.10 ist daher  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_n$ , und es gilt Gleichheit.  $\square$

#### 64.4. Bildmaße.

**Definition 64.8.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(N, \mathcal{B})$  ein Messraum und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Dann nennt man das durch

$$\nu(T) := \mu(\varphi^{-1}(T))$$

definierte Maß auf  $N$  das *Bildmaß* von  $\mu$  unter  $\varphi$ . Es wird mit  $\varphi_*\mu$  bezeichnet.

**Lemma 64.9.** Es seien  $(M, \mathcal{A})$ ,  $(N, \mathcal{B})$  und  $(S, \mathcal{C})$  Messräume und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

und

$$\psi : N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei  $\mu$  ein Maß auf  $M$ . Dann gilt für die Bildmaße

$$(\psi \circ \varphi)_*\mu = \psi_*(\varphi_*\mu).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 64.8. □

**Definition 64.10.** Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  Maßräume. Eine messbare Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

heißt *maßtreu*, wenn für jede messbare Menge  $T \subseteq N$  die Beziehung

$$\nu(T) = \mu(\varphi^{-1}(T))$$

gilt.

Eine messbare Abbildung  $\varphi : (M, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (N, \mathcal{B}, \nu)$  ist genau dann maßtreu, wenn  $\nu$  das Bildmaß von  $\mu$  unter  $\varphi$  ist.

#### 64.5. Produkt von topologischen Räumen.

**Definition 64.11.** Unter dem *Produkt der topologischen Räume*  $X$  und  $Y$  versteht man die Produktmenge  $X \times Y$  zusammen mit derjenigen Topologie (genannt *Produkttopologie*), bei der eine Teilmenge  $W \subseteq X \times Y$  genau dann offen ist, wenn man sie als Vereinigung von Produktmengen der Form  $U \times V$  mit offenen Mengen  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  schreiben kann.



Eine Zylinderoberfläche ist der Produktraum aus einer Kreislinie und einem Intervall.

## 65. VORLESUNG

## 65.1. Fortsetzung von äußeren Maßen.

**Definition 65.1.** Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *äußeres Maß* auf  $M$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Für je zwei Mengen  $S, T \in \mathcal{P}$  mit  $S \subseteq T$  gilt  $\mu(S) \leq \mu(T)$ .
- (2) Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen  $T_i$ ,  $i \in I$ , aus  $\mathcal{P}$ , für die  $\bigcup_{i \in I} T_i$  ebenfalls zu  $\mathcal{P}$  gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$



Constantin Carathéodory (1873-1950). Auf ihn geht der Fortsetzungssatz für Maße zurück.

**Definition 65.2.** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$  und

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf  $M$ . Für eine beliebige Teilmenge  $T \subseteq M$  definiert man

$$\tilde{\mu}(T) := \inf\left(\sum_{i \in I} \mu(T_i), T \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i, T_i \in \mathcal{P}, I \text{ abzählbar}\right)$$

und nennt dies die *Fortsetzung des äußeren Maßes*  $\mu$ .

Bei dieser Definition nimmt man also das Infimum über alle Überpflasterungen.

**Lemma 65.3.** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$  und

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf  $M$ . Dann ist die Fortsetzung  $\tilde{\mu}$  des äußeren Maßes  $\mu$  ein äußeres Maß auf der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$ , das auf  $\mathcal{P}$  mit  $\mu$  übereinstimmt.

*Beweis.* Sei  $T \in \mathcal{P}$ . Das Mengensystem  $\{T\}$  ist natürlich eine Überpflasterung von  $T$ , und für jede Überpflasterung  $T_i, i \in I$ , von  $T$  gilt  $T = \bigcup_{i \in I} T \cap T_i$  und somit

$$\mu(T) = \sum_{i \in I} \mu(T \cap T_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(T_i),$$

so dass  $\mu(T) = \tilde{\mu}(T)$  gilt. Für beliebige Teilmengen  $S \subseteq T$  gilt trivialerweise  $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(T)$ , da eine Überpflasterung von  $T$  insbesondere eine Überpflasterung von  $S$  ist. Sei nun  $T_i, i \in I$ , eine abzählbare Familie von Teilmengen von  $M$ . Wir müssen  $\tilde{\mu}(\bigcup_{i \in I} T_i) \leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i)$  nachweisen. Wenn der rechte Ausdruck gleich  $\infty$  ist, so ist nichts zu zeigen. Wir können also voraussetzen, dass die rechte Familie summierbar ist. Die Summanden dieser Familie sind jeweils das Infimum über Summen, die jeweils zu Überpflasterungen gehören. Nehmen wir an, dass die linke Seite größer als die rechte Seite sei, wobei die Differenz größer als  $\epsilon > 0$  sei. Sei  $\epsilon_i > 0, i \in I$ , so gewählt, dass  $\sum_{i \in I} \epsilon_i \leq \epsilon$  ist; eine solche Familie gibt es aufgrund der Abzählbarkeit von  $I$ . Zu jedem  $i \in I$  gibt es eine Überpflasterung  $T_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} T_{ij}$  mit einer abzählbaren Indexmenge  $J_i$ , mit  $T_{ij} \in \mathcal{P}$  und mit

$$\tilde{\mu}(T_i) \leq \sum_{j \in J_i} \mu(T_{ij}) \leq \tilde{\mu}(T_i) + \epsilon_i.$$

Die Menge  $L = \bigcup_{i \in I} J_i$  ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Wir betrachten nun die durch  $T_\ell, \ell \in L$ , (mit  $\ell = (i, j)$ ) gegebene Überpflasterung von  $\bigcup_{i \in I} T_i$ . Damit gelten unter Verwendung des großen Umordnungssatzes die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) &\leq \sum_{\ell \in L} \mu(T_\ell) \\ &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_i} \mu(T_{ij})\right) \\ &\leq \sum_{i \in I} (\tilde{\mu}(T_i) + \epsilon_i) \\ &= \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i) + \sum_{i \in I} \epsilon_i \\ &\leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i) + \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Es ist keineswegs so, dass die Fortsetzung eines Prämaßes auf der Potenzmenge ein Maß liefert. Dies gilt allerdings auf der erzeugten  $\sigma$ -Algebra, was wir im Folgenden nach einigen Vorbereitungen beweisen werden. Zunächst führen wir den folgenden technischen Hilfsbegriff ein.

**Definition 65.4.** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf  $M$  und  $\tilde{\mu}$  die Fortsetzung von  $\mu$  auf die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$ . Man sagt, dass eine Teilmenge  $Z \subseteq M$  die *Zerlegungseigenschaft* besitzt, wenn für alle  $S \subseteq M$  die Gleichheit  $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$  gilt.

Eine Teilmenge  $Z$  besitzt also die Zerlegungseigenschaft, wenn man für jede Menge  $S$  die Berechnung ihres äußeren Maßes auf die durch  $Z$  gegebene Zerlegung von  $S$  zurückführen kann.

**Lemma 65.5.** *Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,*

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*ein äußeres Maß auf  $M$  und  $\tilde{\mu}$  die Fortsetzung von  $\mu$  auf die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Das Mengensystem aller Teilmengen  $Z \subseteq M$ , die die Zerlegungseigenschaft besitzen, bilden eine  $\sigma$ -Algebra.*
- (2) *Die Einschränkung von  $\tilde{\mu}$  auf diese  $\sigma$ -Algebra ist ein Maß.*

*Beweis.* (1). Sei

$$\mathcal{Z} = \{Z \subseteq M \mid Z \text{ besitzt die Zerlegungseigenschaft}\}.$$

Offensichtlich gehört  $M$  zu  $\mathcal{Z}$  und dieses System ist abgeschlossen unter Komplementbildung. Bevor wir zeigen können, dass  $\mathcal{Z}$  unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, zeigen wir, dass dies für endliche Vereinigungen gilt. Seien also  $Z_1$  und  $Z_2$  aus  $\mathcal{Z}$  und sei  $S \subseteq M$  eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap Z_2) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap (M \setminus Z_2)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \setminus Z_1)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap (M \setminus Z_1)) \\ &\quad + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))). \end{aligned}$$

□

Damit ist  $\mathcal{Z}$  auch unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen und somit liegt insgesamt eine Mengen-Algebra vor. Sei nun  $Z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine abzählbare Familie. Wir wissen, dass die Teilmengen  $Z_n \setminus (Z_0 \cup \dots \cup Z_{n-1})$  zu  $\mathcal{Z}$  gehören. Deren Vereinigung ist gleich der Vereinigung der  $Z_n$ , so dass wir annehmen können, dass die  $Z_n$  paarweise disjunkt sind. Wegen der Disjunktheit ergibt sich induktiv für eine beliebige Teilmenge  $S \subseteq M$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S \cap (Z_0 \cup \dots \cup Z_n)) &= \tilde{\mu}(S \cap Z_0) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_0) + \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \cup \dots \cup Z_n)) \end{aligned}$$

$$= \tilde{\mu}(S \cap Z_0) + \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \dots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n).$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung der Zerlegungseigenschaft von  $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  und der Monotonie des äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_n))) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap Z_0) + \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \dots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n))). \end{aligned}$$

Da dies für alle  $n$  gilt, und da ein äußeres Maß vorliegt, folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n))) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n))). \end{aligned}$$

Da die umgekehrte Abschätzung sowieso gilt, haben wir die gewünschte Gleichheit. (2). Für paarweise disjunkte Mengen  $Z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , aus  $\mathcal{Z}$  ist

$$\tilde{\mu}(Z_1) + \dots + \tilde{\mu}(Z_n) = \tilde{\mu}(Z_1 \cup \dots \cup Z_n) \leq \tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n).$$

Da dies für alle  $n$  gilt, folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(Z_n) \leq \tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor.

**Lemma 65.6.** *Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,*

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*ein Prämaß auf  $M$  und  $\tilde{\mu}$  die Fortsetzung von  $\mu$  auf die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$ . Dann besitzen alle Mengen aus  $\mathcal{P}$  die Zerlegungseigenschaft.*

*Beweis.* Es sei  $Z \in \mathcal{P}$  und  $S \subseteq M$ . Es sei  $S_i$ ,  $i \in I$ , eine abzählbare Überpflasterung von  $S$  mit Mengen aus  $\mathcal{P}$ . Die Durchschnitte  $S_i \cap Z$ ,  $i \in I$ , bzw.  $S_i \cap (M \setminus Z)$ ,  $i \in I$ , sind Überpflasterungen von  $Z$  bzw. von  $M \setminus Z$ . Für jedes  $S_i$  gilt  $\mu(S_i) = \mu(S_i \cap Z) + \mu(S_i \cap (M \setminus Z))$ , da ein Prämaß vorliegt. Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mu(S_i) &= \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap Z) + \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap (M \setminus Z)) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)) \end{aligned}$$

Da dies für alle Überpflasterungen gilt, folgt

$$\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor.  $\square$

## 65.2. Existenzsätze für Maße.

**Satz 65.7.** *Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $M$ ,*

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*ein Prämaß auf  $M$  und  $\tilde{\mu}$  die Fortsetzung von  $\mu$  auf die von  $\mathcal{P}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $\tilde{\mu}$  ein Maß auf  $\mathcal{A}$ . Wenn  $\mu$   $\sigma$ -endlich ist, so ist  $\tilde{\mu}$  die einzige Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf  $\mathcal{A}$ .*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 65.5 und Lemma 65.6. Der Zusatz ergibt sich aus Satz 64.7.  $\square$

## 65.3. Produkt-Messräume.

In den nächsten Vorlesungen wollen wir Produkte von Maßräumen definieren und insbesondere auf dem  $\mathbb{R}^n$  ein Maß definieren.

**Definition 65.8.** Es seien  $(M_1, \mathcal{A}_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n)$  Mengen mit darauf erklärten  $\sigma$ -Algebren. Dann nennt man die von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

auf  $M_1 \times \cdots \times M_n$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra die *Produkt- $\sigma$ -Algebra* der  $(M_i, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sie wird mit  $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$  bezeichnet.

**Lemma 65.9.** *Es seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  Messräume und es sei  $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  die Produktmenge mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra. Dann sind die Projektionen*

$$p_1 : M \times N \longrightarrow M \text{ und } p_2 : M \times N \longrightarrow N$$

*messbar.*

*Beweis.* Dies folgt direkt daraus, dass zu einer messbaren Teilmenge  $T \subseteq N$  die Urbildmenge

$$p_2^{-1}(T) = M \times T$$

ein Quader ist und daher nach Definition zu  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  gehört.  $\square$

Diese Aussage gilt natürlich auch für beliebige endliche Produkte. Man kann den Beweis von solchen Aussagen sehr häufig durch eine einfache Induktion auf den Fall von zwei Faktoren zurückführen, so dass wir uns zumeist auf diesen Fall beschränken werden.

**Lemma 65.10.** *Es seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei Messräume und  $T \subseteq M \times N$  eine messbare Teilmenge des Produktes  $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ . Dann sind für jedes  $x \in M$  und jedes  $y \in N$  die Mengen*

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\} \text{ und } T(y) = \{x \in M \mid (x, y) \in T\}$$

*messbar in  $M$  bzw. in  $N$ .*

*Beweis.* Wir zeigen, dass für jedes  $y \in N$  die Inklusionsabbildung

$$\iota_y : M \longrightarrow M \times N, x \longmapsto (x, y),$$

messbar ist. Dazu genügt es nach Lemma 62.13, die Urbilder von messbaren Mengen der Form  $A \times B \subseteq M \times N$  zu betrachten. Für eine solche Menge gilt

$$\iota_y^{-1}(A \times B) = \{x \in M \mid (x, y) \in A \times B\},$$

und dies ist leer, falls  $y \notin B$  und gleich  $A$ , falls  $y \in B$ . So oder so ist sie also eine messbare Teilmenge. Für eine beliebige Teilmenge  $T \subseteq M \times N$  ist daher

$$T(y) = \{x \in M \mid (x, y) \in T\} = \iota_y^{-1}(T)$$

messbar. □

**Lemma 65.11.** *Es seien  $M, N_1, N_2$  Messräume und es seien  $f_1 : M \rightarrow N_1$  und  $f_2 : M \rightarrow N_2$  messbare Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung*

$$(f_1, f_2) : M \longrightarrow N_1 \times N_2, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

*messbar.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 65.4. □

## 66. VORLESUNG

Es ist unser Ziel zu zeigen, dass auf der Produktmenge von Maßräumen unter recht allgemeinen Voraussetzungen ein Maß definiert ist, das durch die Produktwerte auf den Quadern festgelegt ist. Dafür gehen wir den Weg über den Produkt-Präring.

### 66.1. Produkt-Präringe.

**Definition 66.1.** Es seien  $(M_1, \mathcal{P}_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n)$  Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann nennt man den von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{P}_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

erzeugten Präring den *Produkt-Präring* der  $(M_i, \mathcal{P}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Lemma 66.2.** *Es seien  $(M_1, \mathcal{P}_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n)$  Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann besteht der Produkt-Präring aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern.*

*Beweis.* Die Quader  $S_1 \times \cdots \times S_n$  mit  $S_i \in \mathcal{P}_i$  gehören zum Produkt-Präring, und damit auch endliche Vereinigungen davon. Wir müssen also zeigen, dass das angegebene Mengensystem  $\mathcal{H}$  (das aus den endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern besteht) ein Präring ist. Wir beschränken uns dabei auf den Fall von zwei Mengen  $(M, \mathcal{P})$  und  $(N, \mathcal{R})$ , der allgemeine Fall folgt daraus durch Induktion. Die leere Menge ist als leerer Quader in  $\mathcal{H}$  enthalten. Wir diskutieren zunächst die Mengenoperationen für zwei Quader  $S_1 \times T_1$  und  $S_2 \times T_2$ . Der Durchschnitt davon ist gleich

$(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2)$ , also wieder ein Quader. Für die Vereinigung gilt

$$(S_1 \times T_1) \cup (S_2 \times T_2) = ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cup T_2)) \uplus ((S_2 \setminus S_1) \times T_2),$$

was eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern ist. Für die Differenzmenge ist

$$(S_1 \times T_1) \setminus (S_2 \times T_2) = ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \setminus T_2))$$

ebenfalls eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Es seien nun zwei disjunkte endliche Vereinigungen von Quadern,  $V_1 = \bigsqcup_{i \in I} Q_i$  und  $V_2 = \bigsqcup_{j \in J} L_j$ , gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} V_1 \setminus V_2 &= \left( \bigsqcup_{i \in I} Q_i \right) \setminus \left( \bigsqcup_{j \in J} L_j \right) \\ &= \bigsqcup_{i \in I} (Q_i \setminus \left( \bigsqcup_{j \in J} L_j \right)) \\ &= \bigsqcup_{i \in I} ((Q_i \setminus L_{j_0}) \setminus \left( \bigsqcup_{j \in J, j \neq j_0} L_j \right)). \end{aligned}$$

Nach der obigen Überlegung ist  $Q_i \setminus L_{j_0}$  eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Diese kann man vorziehen, und die Behauptung folgt durch Induktion über die Anzahl von  $J$ . Für die Vereinigung ist

$$V_1 \cup V_2 = \left( \bigsqcup_{i \in I} Q_i \right) \cup \left( \bigsqcup_{j \in J} L_j \right)$$

eine endliche Vereinigung von Quadern. Durch Induktion über die Anzahl der Quader kann man unter Verwendung der obigen Überlegung für zwei Quader zeigen, dass man dies auch als eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen kann.  $\square$



Der obige Beweis beinhaltet insbesondere, dass man jede endliche Vereinigung von Quadern als eine endliche disjunkte Vereinigung schreiben kann.

## 66.2. Produktmaße.

**Lemma 66.3.** *Es seien  $(M_1, \mathcal{P}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n, \mu_n)$  Mengen mit darauf erklärten Präringen und Prämaßen. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) Die für eine endliche disjunkte Vereinigung  $V = \bigsqcup_{i \in I} Q_i$  von Quadern  $Q_i = S_{i1} \times \cdots \times S_{in}$  durch

$$\mu(V) = \sum_{i \in I} \mu(Q_i)$$

mit  $\mu(Q_i) = \mu_1(S_{i1}) \cdots \mu_n(S_{in})$  definierte Zahl ist unabhängig von der gewählten Zerlegung.

- (2) Seien  $\mu_i(M_i) < \infty$  (insbesondere sei dies definiert). Dann ist die Zuordnung  $V \mapsto \mu(V)$  ein Prämaß auf dem Produkt-Präring.

*Beweis.* Wir beschränken uns im Beweis auf zwei Mengen  $(M, \mathcal{P}, \pi)$  und  $(N, \mathcal{R}, \rho)$ , die allgemeine Aussage folgt daraus durch Induktion. Seien

$$V = \bigsqcup_{i \in I} Q_i = \bigsqcup_{j \in J} L_j$$

zwei Darstellungen einer Menge  $V$  als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Wir müssen  $\sum_{i \in I} \mu(Q_i) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$  zeigen. Für jeden Quader  $Q_i$  ist insbesondere  $Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} L_j$ . Damit ist auch

$$Q_i = Q_i \cap \left( \bigsqcup_{j \in J} L_j \right) = \bigsqcup_{j \in J} (Q_i \cap L_j).$$

Wir können nach Lemma 66.2 die Durchschnitte rechts als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben. Damit erhalten wir eine dritte Darstellung von  $V$ , die beide Darstellungen verfeinert. Daher können wir gleich annehmen, dass jedes  $L_j$  Teilmenge eines  $Q_i$  ist. Dann ist insbesondere  $Q_i = \bigsqcup_{j \in J_i} L_j$  mit einer gewissen Teilmenge  $J_i \subseteq J$ , wobei die  $J_i$  für verschiedene  $i$  disjunkt sind. Es genügt also, für einen Quader

$$Q = A \times B = \bigsqcup_{j \in J} L_j$$

die Gleichheit  $\mu(Q) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$  zu zeigen. Da  $J$  endlich ist, sind überhaupt nur endlich viele Seiten  $S_j$  aus  $\mathcal{P}$  und  $T_j$  aus  $\mathcal{R}$  an diesen überdeckenden Quadern beteiligt. Aus diesen Seiten kann man ein Mengensystem  $\mathcal{S}$  bilden, das aus allen möglichen Durchschnitten der  $S_j$  und ihrer Komplemente  $A \setminus S_j$  besteht, und ein Mengensystem  $\mathcal{T}$  bilden, das aus allen möglichen Durchschnitten der  $T_j$  und ihrer Komplemente  $B \setminus T_j$  besteht. Diese Mengen seien mit  $S_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , und  $T_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , bezeichnet. Damit kann man jeden Quader  $L_j$  als eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern der Form  $S_\lambda \times T_\gamma$  schreiben (das bedeutet, dass wir ein „Raster“ einführen), und jeder dieser Quader kommt in genau einem  $L_j$  vor. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \pi(A) \cdot \rho(B) \\ &= \pi\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda\right) \cdot \rho\left(\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma\right) \\ &= \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \pi(S_\lambda)\right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(T_\gamma)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \pi(S_\lambda) \cdot \rho(T_\gamma) \\
&= \sum_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \mu(S_\lambda \times T_\gamma) \\
&= \sum_{j \in J} \mu(L_j)
\end{aligned}$$

(2). Es sei  $V = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  eine abzählbare disjunkte Vereinigung, wobei  $V$  und die  $V_n$  endliche disjunkte Vereinigungen von Quadern sind. Wir müssen  $\mu(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n)$  zeigen. Dies kann man direkt auf den Fall zurückführen, wo  $V = Q$  und  $V_n = Q_n$  Quader sind. Zu einer Teilmenge  $T \subseteq M \times N$  und zu  $x \in M$  betrachten wir

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}.$$

Wenn  $T$  zum Produkt-Präring gehört, also eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern ist, so gehören diese Mengen zu  $\mathcal{R}$ , da sie eine endliche Vereinigung gewisser ( $N$ -)Seiten dieser Quader sind. Zu einer positiven reellen Zahl  $a$  kann man die Menge

$$T^a = \{x \in M \mid \rho(T(x)) = a\}$$

betrachten. Diese Menge ist wiederum eine endliche Vereinigung von ( $M$ -)Seiten der beteiligten Quader und gehört somit zu  $\mathcal{P}$ . Weiterhin kann  $T^a \neq \emptyset$  nur für endlich viele Werte  $a \in \mathbb{R}$  sein, nämlich nur für die Summen der Werte des ( $\rho$ -)Prämaßes der ( $N$ -)Seiten der beteiligten Quader. Mit diesen Notationen gilt

$$\mu(T) = \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T^a) \cdot a,$$

da dies für jeden Quader gilt und daraus durch Aufsummieren folgt. Sei also nun  $Q = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$  eine abzählbare Zerlegung in Quader. Wir müssen

$$\begin{aligned}
\mu(Q) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu(Q_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q_0 \uplus \dots \uplus Q_n)
\end{aligned}$$

zeigen. Nach Übergang zu den Komplementen in  $Q$  ist dies äquivalent damit, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = 0$$

ist für  $T_n = Q \setminus (Q_0 \uplus \dots \uplus Q_n)$ . Es ist  $T_n \downarrow \emptyset$ , und damit ist auch  $T_n(x) \downarrow \emptyset$  für jedes  $x \in M$ . Nach Lemma 64.4 ist daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T_n(x)) = 0$ . Zu  $\delta > 0$  definieren wir

$$T_n^{\geq \delta} = \{x \in M \mid \rho(T_n(x)) \geq \delta\} = \bigcup_{a \geq \delta} T_n^a.$$

Da für jedes  $x \in M$  die Folge  $\rho(T_n(x))$  gegen 0 konvergiert, schrumpft die Mengenfolge  $T_n^{\geq \delta}$  für jedes  $\delta > 0$  gegen  $\emptyset$ . Daraus folgt, wieder mit Lemma 64.4, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(T_n^{\geq \delta}) = 0$ . Seien nun  $\delta, \epsilon > 0$  gegeben. Zu  $\epsilon$  gibt es ein  $n_0$  mit  $\pi(T_n^{\geq \delta}) \leq \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Für diese  $n$  hat man dann insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(T_n) &= \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T_n^a) \cdot a \\ &= \left( \sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) + \left( \sum_{a \geq \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) \\ &\leq \left( \sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) + \left( \sum_{\rho(N) \geq a \geq \delta} \pi(T_n^{\geq \delta}) \cdot a \right) \\ &\leq \pi(M) \cdot \delta + \epsilon \cdot \rho(N). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\pi(M)$  und  $\rho(N)$  endlich sind, kann man den letzten Term durch geeignete Wahl von  $\delta$  und  $\epsilon$  beliebig klein machen. Daher konvergiert  $\mu(T_n)$  gegen 0.  $\square$

**Satz 66.4.** *Es seien  $n$   $\sigma$ -endliche Maßräume  $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$  gegeben. Dann gibt es genau ein ( $\sigma$ -endliches) Maß  $\mu$  auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ , das für alle messbaren Quader den Wert*

$$\mu(T_1 \times \dots \times T_n) = \mu_1(T_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(T_n)$$

*besitzt.*

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall von zwei  $\sigma$ -endlichen Maßräumen  $(M, \mathcal{A}, \pi)$  und  $(N, \mathcal{B}, \rho)$ . Es seien  $M_n, n \in \mathbb{N}$ , bzw.  $N_n, n \in \mathbb{N}$ , jeweils Ausschöpfungen der Räume durch Teilmengen mit endlichem Maß. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 64.7, da das Maß auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem aller Quader festgelegt ist, und die Mengen  $M_n \times N_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Ausschöpfung des Produktraumes mit endlichem Maß bilden.

Zur Existenz. Wir ersetzen zuerst die Ausschöpfungen durch disjunkte Ausschöpfungen. Dann bilden die  $M_i \times N_j, (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , eine disjunkte Ausschöpfung von  $M \times N$ . Da ein Maß durch die Einschränkungen auf einer abzählbaren disjunkten Vereinigung eindeutig bestimmt ist, genügt es, auf jedem  $M_i \times N_j$  ein Maß zu konstruieren. D.h. wir können annehmen, dass die Maße  $\pi$  und  $\rho$  endlich sind. Es sei  $\mathcal{H}$  der Produkt-Präring auf  $M \times N$ . Nach Lemma 66.3 gibt es auf diesem Mengensystem ein wohldefiniertes Prämaß, das auf den Quadern durch das Produkt der Seitenmaße gegeben ist. Aufgrund von Satz 65.7 kann man dieses Prämaß zu einem Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  fortsetzen.  $\square$

**Definition 66.5.** Es seien  $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Dann nennt man das in Lemma 66.3 und Satz 66.4 konstruierte Maß das *Produkt-Maß* auf  $M_1 \times \dots \times M_n$ . Es wird mit  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$  bezeichnet.

## 67. VORLESUNG

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen, um auf den Borel-Mengen des  $\mathbb{R}^n$  ein Maß zu definieren, das für einen Quader, dessen Seiten reelle Intervalle sind, einfach das Produkt der Seitenlängen ist. Dieses Maß heißt *Borel-Lebesgue-Maß*. Wir beginnen mit der eindimensionalen Situation.



Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

67.1. Das Borel-Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 67.1.** *Das Mengensystem aller Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}$ , die sich als eine endliche (disjunkte) Vereinigung von halboffenen Intervallen  $[a, b[$  schreiben lassen, ist ein Mengen-Präring.*

*Beweis.* Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$  lässt sich genau dann als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben, wenn dies mit endlich vielen disjunkten halboffenen Teilmengen möglich ist, siehe Aufgabe 67.9. Die leere Menge ist das halboffene Intervall  $[a, a[$  (bzw. die leere Vereinigung). Die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen ist klar. Sei  $V = I_1 \cup \dots \cup I_m$  und  $W = J_1 \cup \dots \cup J_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} V \setminus W &= (I_1 \cup \dots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n) \\ &= (I_1 \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) \cup \dots \cup (I_m \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) \\ &= ((I_1 \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \dots \cup J_n)) \cup \dots \cup ((I_m \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \dots \cup J_n)). \end{aligned}$$

Da  $I_1 \setminus J_1$  eine Vereinigung von maximal zwei halboffenen Intervallen ist, folgt die Behauptung durch Induktion über  $n$ .  $\square$

**Lemma 67.2.** *Es sei  $\mathcal{V}$  der Mengen-Präring aller Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}$ , die sich als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen  $[a, b[$  schreiben lassen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) Die zu  $V \in \mathcal{V}$  über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

$$V = [a_1, b_1[ \uplus \dots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

(2) Durch die Zuordnung  $V \mapsto \mu(V)$  wird ein Prämaß auf diesem Prering definiert.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 67.10. □

**Satz 67.3.** Es sei  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$ . Dann gibt es genau ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\lambda$  auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , das für jedes halboffene Intervall  $[a, b[$  den Wert  $\lambda([a, b[) = b - a$  besitzt. Statt halboffene Intervalle kann man auch offene oder abgeschlossene Intervalle nehmen.

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 67.2, aus Satz 64.7 und aus Satz 65.7. □

**Definition 67.4.** Das eindeutig bestimmte Maß  $\lambda^1 = \lambda$  auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , das für jedes halboffene Intervall  $[a, b[$  den Wert  $\lambda([a, b[) = b - a$  besitzt, heißt (eindimensionales) *Borel-Lebesgue-Maß*.

## 67.2. Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 67.5.** Der  $\mathbb{R}^n$  sei versehen mit der  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen  $\mathcal{B}^n$ . Dann gibt es auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  genau ein  $\sigma$ -endliches Maß

$$\lambda^n : \mathcal{B}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \lambda^n(T),$$

das für alle Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  den Wert

$$\lambda^n(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

besitzt.

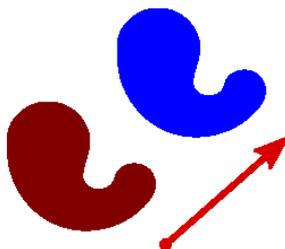
*Beweis.* Für  $n = 1$  ist dies der Inhalt von Satz 67.3. Für  $n \geq 2$  folgt dies aus Satz 66.4, angewendet auf das  $n$ -fache Produkt von  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$  mit sich selbst. □

**Definition 67.6.** Das eindeutig bestimmte Maß  $\lambda = \lambda^n$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , das für jeden Quader der Form  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  den Wert  $\lambda(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$  besitzt, heißt *Borel-Lebesgue-Maß* auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 67.7.** Das Borel-Lebesgue-Maß ordnet also jeder Borel-Menge eine reelle Zahl oder das Symbol  $\infty$  zu. Die Quader bilden dabei die Grundkörper, denen auf eine besonders einfache Weise ein Maß zugeordnet wird, wodurch das gesamte Maß festgelegt wird. Für eine beliebige messbare Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  ist dabei  $\lambda(T)$  gegeben als das Infimum von  $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$  über alle abzählbaren Überpflasterungen von  $T$  mit Quadern (so war eben das äußere

Maß definiert, mit dessen Hilfe wir den Fortsetzungssatz für Maße aufstellen konnten). Es gibt kein allgemeines Verfahren, für gegebene Mengen (bspw. Flächenstücke, Körper) ihr Maß (ihren Flächeninhalt, ihr Volumen) effektiv zu bestimmen. Eine wichtige Technik ist die Integration von Funktionen.

### 67.3. Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes.



Für eine beliebige Teilmenge  $T \subseteq V$  in einem Vektorraum  $V$  und einen Vektor  $v \in V$  nennt man

$$T + v = \{x + v \mid x \in T\}$$

die um  $v$  verschobene Menge.

**Definition 67.8.** Ein Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  und alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$  die Gleichheit

$$\mu(T) = \mu(T + v)$$

gilt.

**Satz 67.9.** Das Borel-Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  ist das einzige translationsinvariante Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , das auf dem Einheitswürfel den Wert 1 besitzt.

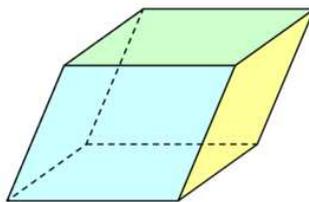
*Beweis.* Sei  $\mu$  ein solches Maß. Da der  $\mathbb{R}^n$  durch abzählbar viele Verschiebungen des Einheitswürfels überdeckt wird, die wegen der Translationsinvarianz von  $\mu$  alle das gleiche Maß besitzen, ist  $\mu$   $\sigma$ -endlich. Wir müssen zeigen, dass  $\mu$  mit  $\lambda^n$  übereinstimmt, wobei es aufgrund des Eindeutigkeitsatzes genügt, die Gleichheit auf einem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem nachzuweisen. Ein solches System bilden die Quader der Form  $[a_1, b_1[ \times \cdots \times [a_n, b_n[$  mit rationalen Ecken. Wegen der Translationsinvarianz von  $\mu$  besitzt ein solcher Quader das gleiche Maß wie der verschobene Quader  $[0, b_1 - a_1[ \times \cdots \times [0, b_n - a_n[$ . Wir schreiben einen solchen Quader unter Verwendung eines Hauptnenners als  $Q = [0, \frac{c_1}{m}[ \times \cdots \times [0, \frac{c_n}{m}[$  mit  $m, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}$ . Dieser Quader setzt sich aus  $c_1 \cdots c_n$  Quadern (nämlich  $[\frac{i_1}{m}, \frac{i_1+1}{m}[ \times \cdots \times [\frac{i_n}{m}, \frac{i_n+1}{m}[$  mit  $i_j \in \{0, \dots, c_j - 1\}$ ) zusammen, die alle das gleiche  $\mu$ -Maß haben, da sie ineinander verschoben werden können. Das  $\mu$ -Maß des Quaders  $Q$  ist also das  $c_1 \cdots c_n$ -fache des  $\mu$ -Maßes des Quaders  $\tilde{Q} = [0, \frac{1}{m}[ \times \cdots \times [0, \frac{1}{m}[$ . Da sich der Einheitswürfel aus  $m^n$  verschobenen

Kopien dieses kleineren Würfels zusammensetzt, muss  $\mu(\tilde{Q}) = \frac{1}{m^n}$  und damit

$$\mu(Q) = c_1 \cdots c_n \cdot \frac{1}{m^n} = \lambda^n(Q)$$

sein. □

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes kann man auch so formulieren, dass jede Translation eine maßtreue Abbildung ist.



**Definition 67.10.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  gegeben. Dann nennt man

$$P = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das von den  $v_i$  erzeugte *Parallelotop*.

**Lemma 67.11.** *Es sei  $\lambda$  ein translationsinvariantes Maß auf  $\mathbb{R}^n$  und es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein echter Unterraum. Dann ist  $\lambda(U) = 0$ .*

*Beweis.* Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum der Dimension  $d < n$  und nehmen wir an, dass  $\lambda^n(U) > 0$  ist. Es sei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$  und

$$P = \{a_1 u_1 + \dots + a_d u_d \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das davon erzeugte  $d$ -dimensionale Parallelotop.<sup>4</sup> Die verschobenen Parallelotope

$$P_k = P + k_1 u_1 + \dots + k_d u_d, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$$

besitzen wegen der Translationsinvarianz alle dasselbe Maß und bilden eine Überdeckung von  $U$ . Da es abzählbar viele sind, muss  $\lambda^n(P) > 0$  gelten. Es sei nun  $u_{d+1}, \dots, u_n$  eine Ergänzung der Basis zu einer Basis von  $V$ , und sei

$$R = \{a_1 u_1 + \dots + a_d u_d + \dots + a_n u_n \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das zugehörige  $n$ -dimensionale Parallelotop. Für dieses ist  $\lambda^n(R) < \infty$ . Wir betrachten nun die abzählbar unendlich vielen Parallelotope

$$P_q = P + q u_n \quad \text{mit } q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Diese liegen alle innerhalb von  $R$  und besitzen wegen der Translationsinvarianz alle das gleiche Maß wie  $P$ . Ferner sind sie paarweise disjunkt, da

<sup>4</sup>Wenn man eine Orthonormalbasis wählt handelt es sich um einen Würfel.

andernfalls ein nichttriviales Vielfaches von  $u_n$  zu  $P \subset U$  gehören würde. Aus

$$\sum_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda^n(P_q) = \lambda^n\left(\bigcup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P_q\right) \leq \lambda^n(R)$$

folgt  $\lambda^n(R) = \infty$ , ein Widerspruch.  $\square$

Allgemein nennt man Unterräume (und zwar nicht nur Untervektorräume, sondern auch affine Unterräume, also verschobene Untervektorräume) des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  *Hyperebenen*. Insbesondere besitzen Hyperebenen das Maß 0.

**Lemma 67.12.** *Es sei  $\nu$  ein translationsinvariantes Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\nu = c\lambda^n$ .*

*Beweis.* Es sei  $c = \nu(E)$ , wobei  $E$  der Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^n$  sei. Wenn  $c = 0$  ist, so liegt das Nullmaß vor, da sich der  $\mathbb{R}^n$  mit abzählbar vielen verschobenen Einheitswürfeln überdecken lässt, die wegen der Translationsinvarianz ebenfalls das Maß 0 haben. Dann hat der Gesamttraum das Maß 0 und damit hat jede messbare Teilmenge das Maß 0. Sei also  $c \neq 0$ . In diesem Fall betrachten wir das durch

$$\mu(T) := \frac{1}{c}\nu(T)$$

definierte (umskalierte) Maß. Dieses ist nach wie vor translationsinvariant und besitzt auf dem Einheitswürfel den Wert 1. Nach Satz 67.9 ist also  $\mu = \lambda^n$  und somit ist  $\nu(T) = c\lambda^n$ .  $\square$

## 68. VORLESUNG

### 68.1. Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen.

**Lemma 68.1.** *Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

*eine bijektive lineare Abbildung. Dann gelten für das Bildmaß  $L_*\lambda^n$  des Borel-Lebesgue-Maßes  $\lambda^n$  unter  $L$  folgende Eigenschaften.*

- (1)  $L_*\lambda^n$  ist translationsinvariant.
- (2) Bei  $V = \mathbb{R}^n$  ist  $L_*\lambda^n = \frac{1}{\lambda^n(P_L)} \cdot \lambda^n$ , wobei  $P_L$  das von den Bildvektoren  $L(e_1), \dots, L(e_n)$  erzeugte Parallelotop bezeichnet.

*Beweis.* (1). Sei  $\tau_v$  die Translation um den Vektor  $v \in V$ . Es sei  $w = L^{-1}(v)$ . Daher ist

$$\tau_v \circ L = L \circ \tau_w.$$

Somit ist für eine beliebige messbare Menge  $B \subseteq V$  aufgrund der Translationsinvarianz von  $\lambda^n$

$$\begin{aligned}
(L_*\lambda^n)(B+v) &= \lambda^n(L^{-1}(B+v)) \\
&= \lambda^n(\tau_w^{-1}(L^{-1}(B+v))) \\
&= \lambda^n(L^{-1}(\tau_v^{-1}(B+v))) \\
&= \lambda^n(L^{-1}(B)) \\
&= (L_*\lambda^n)(B).
\end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) mit Lemma 67.12. □

**Satz 68.2.** *Es sei*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  die Beziehung*

$$\lambda^n(L(S)) = |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

*Beweis.* Wenn  $L$  nicht bijektiv ist, so folgt die Aussage aus Lemma 67.11 und Satz 14.13. Wir können also annehmen, dass  $L$  bijektiv ist. Dann kann man die Aussage mit dem Bildmaß als

$$L_*\lambda^n = \frac{1}{|\det L|} \lambda^n$$

formulieren. Aufgrund von Satz 13.13 in Verbindung mit Lemma 13.15 gibt es Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_k$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $L = D \circ E_1 \circ \dots \circ E_k$ . Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes und wegen Lemma 64.9 und Aufgabe 68.5 genügt es, die Aussage für Diagonalmatrizen und Elementarmatrizen zu beweisen.

Wegen Lemma 68.1 ist also für diese Matrizen zu zeigen, dass das Volumen des von den Bildvektoren der Standardvektoren erzeugte Parallelotop gleich dem Betrag der Determinante der Matrix ist. Für eine Diagonalmatrix ist das erzeugte Parallelotop der Quader, dessen Seitenlängen die Beträge der Diagonaleinträge sind, so dass das Volumen das Produkt davon ist. Nach Lemma 14.8 ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, so dass im Betrag Gleichheit gilt. Damit gilt die Aussage auch für eine elementare Skalierungsmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist.

Da die Determinante der übrigen Elementarmatrizen 1 oder  $-1$  ist, müssen wir zeigen, dass das Volumen des von den Spaltenvektoren einer solchen Elementarmatrix erzeugten Parallelotops gleich 1 ist. Dies ist klar für den Typ (1), also für die elementare Vertauschungsmatrix, da es sich um den Einheitswürfel handelt, wobei lediglich die Reihenfolge der erzeugenden Vektoren geändert wird. Es bleibt also eine elementare Scherungsmatrix  $A_{ij}(a)$  mit  $a \neq 0$  und  $i \neq j$  zu betrachten. Wegen (Wir notieren nur die zweidimensionale Situation, da sich alles in zwei Zeilen und zwei Spalten abspielt)

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dem schon bewiesenen kann man  $a = 1$  annehmen. Ferner kann man durch umnummerieren annehmen, dass  $i = 1$  und  $j = 2$  ist. Es geht dann um das Volumen des von

$$e_1, e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n$$

erzeugten Parallelotops, also um

$$\begin{aligned} P &= \{t_1 e_1 + t_2(e_1 + e_2) + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{(t_1 + t_2)e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \\ &\quad \text{für } i \geq 2, s \in [0, 2], t_2 \leq s \leq 1 + t_2\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$H_1 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], t_2 \geq s\}$$

und

$$H_2 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [1, 2], s \geq 1 + t_2\}.$$

Dann ist

$$[0, 2] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = H_1 \cup P \cup H_2,$$

wobei die Durchschnitte dieser drei Mengen jeweils in einer Hyperebene enthalten sind und daher nach Lemma 67.11 das Maß 0 besitzen. Also ist einerseits

$$\lambda^n(P) = 2 - \lambda^n(H_1) - \lambda^n(H_2).$$

Andererseits geht  $H_2$  durch verschieben um  $e_1$  aus

$$W_2 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], s \geq t_2\}$$

hervor und besitzt damit wegen der Translationsinvarianz dasselbe Volumen wie  $W_2$ . Da  $H_1 \cup W_2$  der Einheitswürfel ist, wobei der Durchschnitt wieder in einer Hyperebene liegt, ist

$$\lambda^n(H_1) + \lambda^n(H_2) = \lambda^n(H_1) + \lambda^n(W_2) = 1$$

und somit ist  $\lambda^n(P) = 1$ . □

**Korollar 68.3.** *Bei einer Streckung*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor  $a \in \mathbb{R}$  gilt für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 68.2. □

**Korollar 68.4.** *Eine lineare Isometrie*

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist volumentreu.

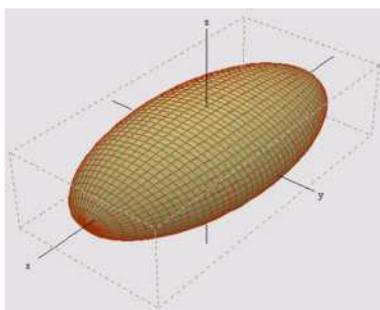
*Beweis.* Dies folgt wegen Lemma 68.1 und Satz 68.2 aus Aufgabe 68.4.  $\square$

**Korollar 68.5.** *Eine Drehung*

$$D(\theta) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(die durch eine Drehmatrix  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  gegeben ist), ist flächentreu.

*Beweis.* Dies folgt wegen Lemma 68.1 und Satz 68.2 aus Satz 25.11(6).  $\square$



**Beispiel 68.6.** Ein *achsenparalleles Ellipsoid* wird im  $\mathbb{R}^3$  durch

$$E = \{(x, y, z) \mid ax^2 + by^2 + cz^2 \leq r^2\}$$

mit  $a, b, c \neq 0$  beschrieben. Es ist das Bild der Einheitskugel

$$K_3 = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$$

unter der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

also mit  $x = \frac{r}{\sqrt{a}}u$ ,  $y = \frac{r}{\sqrt{b}}v$  und  $z = \frac{r}{\sqrt{c}}w$ . Nach Satz 68.2 ist daher das Volumen dieses Ellipsoids gleich

$$\text{vol}(E) = \frac{r^3}{\sqrt{abc}} \cdot \text{vol}(K_3).$$

Das Volumen der Einheitskugel ist  $\frac{4}{3}\pi$ , siehe Beispiel 73.6.

## 68.2. Volumina in euklidischen Räumen.

Auf jedem reellen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  kann man ein sinnvolles Maß definieren, indem man eine Isomorphie

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

nimmt und das Bildmaß zum Borel-Lebesgue-Maß nimmt. Dieses Maß ist allerdings abhängig von der gewählten Isomorphie, bei zwei verschiedenen Isomorphismen unterscheiden sich die so gewonnenen Maße um einen skalaren Faktor. Bei euklidischen Räumen kann man aber mit Hilfe von Orthonormalbasen ein kanonisches Borel-Lebesgue-Maß definieren.

**Satz 68.7.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß  $\lambda_V$  auf den Borelmengen von  $V$ , das jedem von einer Orthonormalbasis aufgespannten Parallelotop den Wert 1 zuweist.*

*Beweis.* Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und es sei

$$L_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

die dadurch definierte lineare Isometrie. Dann ist das Bildmaß  $L_{u*}\lambda^n$  nach Lemma 68.1 translationsinvariant und besitzt auf dem von den  $u_1, \dots, u_n$  erzeugten Parallelotop den Wert 1. Es bleibt also zu zeigen, dass dieses Maß auch jedem anderen orthonormalen Parallelotop den Wert 1 zuweist. Sei also  $v_1, \dots, v_n$  eine weitere Orthonormalbasis mit dem zugehörigen Parallelotop  $P_v$  und der zugehörigen Isometrie

$$L_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i.$$

Dann ist

$$L_u^{-1}(P_v) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(L_v^{-1}(P_v)) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(W),$$

wobei  $W$  den Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Da  $L_v^{-1} \circ L_u$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist, folgt die Aussage aus Korollar 68.4.  $\square$

Das in dieser Aussage für euklidische Vektorräume definierte Maß heißt ebenfalls *Borel-Lebesgue-Maß*.

**Satz 68.8.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und sei  $P$  das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß  $\lambda_V$  auf  $V$*

$$\lambda_V(P) = (\det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n})^{1/2}.$$

*Beweis.* Die Positivität der Determinante der Gramschen Matrix folgt aus Korollar 47.2. Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und es sei

$$v_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k.$$

Die Spalten der Matrix  $A = (a_{kj})_{kj}$  sind also die Koeffizienten von  $v_j$  bzgl. der gegebenen Orthonormalbasis. Nach Satz 68.2 und aufgrund der Definition des Maßes  $\lambda_V$  in Satz 68.7 ist somit

$$\lambda_V(P) = |\det A|.$$

Wegen

$$\langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k, \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$$

ist

$$A^t A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}.$$

Nach Satz 15.6 ist  $\det A = \det A^t$ , so dass die Aussage sich aus Satz 15.4 ergibt.  $\square$

Die vorstehende Aussage erlaubt es, auch bei  $k < n$  das  $k$ -dimensionale Maß von  $k$ -dimensionalen Parallelotops im  $\mathbb{R}^n$  auszurechnen (ihr  $n$ -dimensionales Maß ist 0, da sie in einem echten Untervektorraum liegen). Die einfachste Situation liegt bei  $k = 1$  vor, dann handelt es sich um eine einfache Längenberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes. Ein typischeres Beispiel ist die Flächenberechnung eines Parallelogramms im  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 68.9.** Wir betrachten das von den Vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  aufgespannte Parallelogramm im  $\mathbb{R}^3$ . Nach Satz 68.8 müssen wir die Skalarprodukte dieser Vektoren berechnen. Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 13, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 21.$$

Dies führt zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante 269. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also  $\sqrt{269}$ .

## 69. VORLESUNG

Wir beginnen jetzt mit der allgemeinen Integrationstheorie, die auf der Maßtheorie aufbaut. Wie schon im Fall von stetigen Funktionen

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

geht es um den (Flächen-)Inhalt unterhalb des Graphen der Funktion. Jetzt wird allerdings der Definitionsbereich nicht mehr unbedingt ein Intervall sein, sondern ein beliebiger (zumeist  $\sigma$ -endlicher) Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$ . Eine Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert nach wie vor einen Graphen in  $M \times \mathbb{R}$  und damit eine Teilmenge aus  $M \times \mathbb{R}$ , die unterhalb des Graphen (und innerhalb von  $M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ) liegt. Auf  $M \times \mathbb{R}$  existiert unter gewissen schwachen Voraussetzungen das Produktmaß  $\mu \otimes \lambda^1$ , und mit diesem Maß wird das Integral erklärt. Die Funktionen, die man sinnvoll integrieren kann, gehen weit über die stetigen Funktionen hinaus. Sie müssen allerdings mit den gegebenen Maßräumen verträglich sein, was zum Begriff der messbaren Funktion bzw. der numerischen Funktion führt.

### 69.1. Messbare numerische Funktionen.

Wir erinnern daran, dass wir

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gesetzt haben. Diese Menge versehen wir mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\overline{\mathcal{B}}$ , zu der eine Teilmenge  $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  genau dann gehört, wenn  $T \cap \mathbb{R}$  eine Borel-Menge in  $\mathbb{R}$  ist. Man kann auf  $\overline{\mathbb{R}}$  auch eine Topologie definieren derart, dass das zugehörige System der Borel-Mengen gleich  $\overline{\mathcal{B}}$  ist. Die (halb)offenen Intervalle bilden wieder ein Erzeugendensystem für  $\overline{\mathcal{B}}$ . Auch das Borel-Lebesgue-Maß lässt sich durch  $\lambda^1(T) = \lambda^1(T \cap \mathbb{R})$  darauf ausdehnen, d.h. die beiden unendlichen Punkte kann man, wie jeden einzelnen Punkt, für das Borel-Lebesgue-Maß ignorieren.

Auch den Supremumsbegriff für Teilmengen und den Konvergenzbegriff für Folgen kann man auf  $\overline{\mathbb{R}}$  in naheliegender Weise ausdehnen. Eine nach oben unbeschränkte Menge besitzt  $\infty$  als Supremum, und eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen  $\infty$ , wenn sie bestimmt gegen  $\infty$  divergiert. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  nennt man auch eine *numerische Funktion*.

**Definition 69.1.** Sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum. Dann nennt man eine numerische Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*messbar*, wenn sie  $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist.

**Lemma 69.2.** Sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine numerische Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist messbar.
- (2) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\{x \in M \mid f(x) \geq a\}$  messbar.
- (3) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\{x \in M \mid f(x) > a\}$  messbar.
- (4) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$  messbar.
- (5) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\{x \in M \mid f(x) < a\}$  messbar.

*Beweis.* Die Bedingungen (2), (3), (4), (5) sind jeweils notwendig, da halbseitig unbeschränkte Intervalle Borel-Mengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  sind. Ist umgekehrt eine der Bedingungen (2), (3), (4) oder (5) erfüllt, so betrachtet man für  $a < b$  die Menge  $[a, b[ = [a, \infty] \setminus [b, \infty]$  (unter Bedingung (2) bzw. entsprechende Mengen unter den anderen Bedingungen). Nach Voraussetzung sind dann auch die Urbilder von diesen halboffenen Intervallen messbare Teilmengen in  $M$ . Da die halboffenen Intervalle nach Lemma 63.10 ein Erzeugendensystem der Borel-Mengen von  $\mathbb{R}$  bilden, folgt die Aussage aus Lemma 62.13.  $\square$

**Lemma 69.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und seien

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Die Funktion  $-f$  ist ebenfalls messbar.
- (2) Sei  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in M$ . Dann ist auch die Funktion  $1/g$  messbar.
- (3) Die Funktionen  $f + g$  und  $f - g$  sind messbar.
- (4) Die Funktion  $f \cdot g$  ist messbar. Wenn  $g$  keine Nullstelle besitzt, so ist auch  $f/g$  messbar.

*Beweis.* Die Rechenoperationen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \mapsto t^{-1}$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto s + t$ , und  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto s \cdot t$ , sind nach Lemma 20.5 und Lemma 20.6 stetig und daher nach Lemma 63.11 messbar. Ferner ist eine Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen wieder messbar, und mit  $f$  und  $g$  ist nach Lemma 65.11 auch die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

messbar. Daher ergeben sich die Behauptungen durch Betrachten der Hintereinanderschaltungen

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}, M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } M \xrightarrow{f, g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+, \cdot} \mathbb{R},$$

□

Die vorstehende Aussage könnte man auch für  $\overline{\mathbb{R}}$  formulieren, wobei man dann allerdings noch einige Rechenregeln festlegen müsste.

Mit den zusätzlichen Symbolen  $+\infty$  und  $-\infty$  lassen sich insbesondere Grenzfunktionen von Funktionenfolgen einfach erfassen. Das *Supremum einer Funktionenfamilie* ist punktweise durch

$$(\sup (f_i, i \in I))(x) = \sup (f_i(x), i \in I)$$

definiert. Es kann den Wert  $\infty$  annehmen, und zwar auch dann, wenn alle  $f_i$  reellwertig sind.

**Lemma 69.4.** *Es sei  $I$  eine abzählbare Indexmenge und  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum. Es sei*

$$f_i : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*( $i \in I$ ) eine Familie von messbaren numerischen Funktionen. Dann sind auch die Funktionen  $\sup (f_i, i \in I)$  und  $\inf (f_i, i \in I)$  messbar.*

*Beweis.* Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} & \{x \in M \mid \sup (f_i, i \in I)(x) \geq a\} \\ &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} \left( \bigcup_{i \in I} \{x \in M \mid f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}\} \right). \end{aligned}$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei  $x$  links enthalten und  $k \in \mathbb{N}_+$  vorgegeben. Wegen  $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a$  kommt die Familie  $f_i(x), i \in I$ , dem Element  $a$  beliebig nahe, insbesondere gibt es also ein  $i \in I$  mit  $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$ , und  $x$  gehört auch rechts dazu. Wenn umgekehrt  $x$  zur rechten Menge dazugehört, so gibt es für jedes  $k \in \mathbb{N}_+$  ein  $i \in I$  mit  $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$ . Daher ist  $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a - \frac{1}{k}$  für alle  $k$  und somit  $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a$ .

Die Menge rechts ist als abzählbarer Durchschnitt von abzählbaren Vereinigungen von nach Voraussetzung messbaren Mengen wieder messbar. Nach Lemma 69.2 folgt dadurch die Messbarkeit der Supremumsabbildung. Die Messbarkeit der Infimumsabbildung beweist man ähnlich oder führt sie durch Betrachten der negativen Funktionen auf die Messbarkeit der Supremumsabbildung zurück.  $\square$

**Beispiel 69.5.** Wir betrachten die konstante Funktionenfolge  $f_n := -\frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) auf einer beliebigen Menge  $M$ . Deren Supremum ist die 0-Funktion. Dabei ist

$$\{x \in M \mid \sup(f_n, n \in \mathbb{N})(x) \geq 0\} = M,$$

aber

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M \mid f_n(x) \geq 0\} = \emptyset,$$

d.h. ohne den Durchschnitt über  $k \in \mathbb{N}_+$  mit dem Abweichungsterm  $-\frac{1}{k}$  ist die Gleichung im Beweis zu Lemma 69.4 nicht richtig.

**Korollar 69.6.** *Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine messbare numerische Funktion. Dann ist auch die Betragsfunktion  $|f|$  messbar.*

*Beweis.* Dies folgt wegen  $|f| = \sup(f, -f)$  aus Lemma 69.3 und aus Lemma 69.4.  $\square$

**Definition 69.7.** Zu einer Funktion

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

nennt man

$$f_+ = \sup(f, 0)$$

den *positiven Teil* und

$$f_- = -\inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$$

den *negativen Teil* von  $f$ .

Dieses Konzept ist hilfreich, um Aussagen für beliebige Funktionen auf nicht-negative Funktionen zurückführen zu können. Man beachte, dass beide Teile nichtnegativ sind. Nach Lemma 69.4 ist der positive als auch der negative Teil einer messbaren Funktionen wieder messbar. Es ist  $f = f_+ - f_-$ .

**Korollar 69.8.** *Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei*

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine Folge von messbaren numerischen Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiere. Dann ist auch  $f$  messbar.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Urbilder von Mengen der Form  $]a, \infty]$  unter der Grenzfunktion messbare Mengen sind. Daraus folgt nach Lemma 69.2 die Messbarkeit der Grenzfunktion. Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned} & \{x \in M \mid f(x) > a\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \left( \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{n \geq n_0} \{x \in M \mid f_n(x) > a + \frac{1}{k}\} \right) \right). \end{aligned}$$

Zum Beweis dieser Gleichheit sei zuerst  $f(x) > a$ . Dann gilt auch  $f(x) > a + \frac{1}{k}$  für ein hinreichend großes  $k$ . D.h. dass  $]a + \frac{1}{k}, \infty]$  eine offene Umgebung von  $f(x)$  ist. Dann gehört  $x$  auch zur inneren Vereinigung der rechten Seite, da diese die mengentheoretische Formulierung für den Sachverhalt ist, dass es ein  $n_0$  gibt derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Folgenglieder  $f_n(x)$  ebenfalls zu  $]a + \frac{1}{k}, \infty]$  gehören. Wenn hingegen  $x$  zur rechten Seite gehört, so bedeutet dies, dass es  $k, n_0 \in \mathbb{N}_+$  derart gibt, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung  $f_n(x) > a + \frac{1}{k}$  besteht. Dann gilt für den Limes  $f(x) \geq a + \frac{1}{k}$  und damit  $f(x) > a$ . Die rechte Seite der Gleichung zeigt, dass es sich um eine messbare Menge handelt, da abzählbare Durchschnitte und abzählbare Vereinigungen von messbaren Mengen wieder messbar sind.  $\square$

Ein äußerst wichtiges Konzept für die Integrationstheorie ist es, dass sich beliebige messbare Funktionen durch besonders einfache Funktionen approximieren lassen, für die das Integral eine Summe ist. Auf diesem Konzept beruhte schon das Riemann-Integral, das wir zu Beginn des zweiten Semesters entwickelt haben. Im Rahmen des Lebesgue-Integrals gibt es eine andere Art von Treppenfunktionen. Dabei wird nicht der Definitionsbereich in endlich viele einfache Stücke (Intervalle) unterteilt, sondern die Bildmenge soll besonders einfach sein.

**Definition 69.9.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt *einfach*, wenn sie nur endlich viele Werte besitzt.

**Definition 69.10.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt  $\sigma$ -einfach, wenn sie nur abzählbar viele Werte besitzt.

Die Terminologie ist hierbei extrem uneinheitlich. Man findet für diese beiden Begriffe auch die Wörter Elementarfunktion und Treppenfunktion, wobei manchmal die Messbarkeit vorausgesetzt wird, manchmal nicht. Manchmal wird auch noch die Nichtnegativität vorausgesetzt.

**Lemma 69.11.** *Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gibt es eine wachsende Folge von nichtnegativen einfachen Funktionen

$$f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die punktweise gegen  $f$  konvergieren.

*Beweis.* Die Idee ist, die Funktion  $f$  im  $n$ -ten Schritt durch eine einfache Funktion  $f_n$  zu approximieren, deren Werte rationale Zahlen der Form  $\frac{k}{2^n}$  sind mit  $0 \leq k \leq n2^n$ . Dies sind nur endlich viele Zahlen. Für jede nichtnegative reelle Zahl  $a$  ist entweder  $a \geq n$ , oder es gibt ein eindeutig bestimmtes  $k$  zwischen 0 und  $n2^n - 1$  mit  $\frac{k}{2^n} \leq a < \frac{k+1}{2^n}$ . Daher ist die folgende einfache Funktion wohldefiniert.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ mit } k \leq n2^n - 1 \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie ist messbar, da aufgrund der Messbarkeit von  $f$  die Mengen  $\{x \in M \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$  messbar sind. Die Folge dieser Funktionen wächst offenbar gegen  $f$ .  $\square$

Für jedes  $x \in M$  gibt ab  $n \geq f(x)$  die Folge  $f_n(x)$  den Wert der Dualentwicklung für  $f(x)$  bis zur  $n$ -ten Ziffer nach dem Komma an.

## 70. VORLESUNG

### 70.1. Integrierbare Funktionen.

Wir führen nun das *Lebesgue-Integral* für messbare Funktionen auf einem Maßraum ein. Dieser Integralbegriff hat gegenüber dem Riemann-Integral folgende Vorteile.

- (1) Der Integralbegriff bekommt ein maßtheoretisches Fundament.
- (2) Es kann über einer (fast) beliebigen Menge integriert werden.
- (3) Es kann eine weit größere Funktionenklasse integriert werden.
- (4) Das Grenzwertverhalten von Funktionenfolgen ist einfacher.
- (5) Man kann Funktionen auf Nullmengen abändern, ohne das Integral zu verändern.
- (6) Die Summe einer abzählbaren Familie reeller Zahlen ist ein Spezialfall.



**Definition 70.1.** Sei  $M$  eine Menge und

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* der Funktion.

**Lemma 70.2.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann sind der Graph  $\Gamma(f)$  und der Subgraph  $S(f)$  messbare Teilmengen in  $M \times \overline{\mathbb{R}}$ .

*Beweis.* Die Projektion

$$p_2 : M \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \longmapsto y,$$

ist nach Lemma 65.9 messbar, und ebenso ist

$$\psi : M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_1} M \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Nach Lemma 65.11 und Lemma 69.3 ist dann auch die Abbildung

$$\varphi : M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_2 \times \psi} \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{-} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Es ist

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid y = f(x)\} = \varphi^{-1}(0)$$

und

$$S(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq y \leq f(x)\} = p_2^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}) \cap \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}),$$

so dass diese beiden Mengen messbar sind.  $\square$

**Definition 70.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann heißt

$$\int_M f d\mu = (\mu \otimes \lambda^1)(S(f))$$

das *Integral* von  $f$  über  $M$  (zum Maß  $\mu$ ).

Diese Definition ist sowohl unmittelbar anschaulich als auch vom theoretischen Standpunkt her sehr schlagkräftig, da sie auf dem Maßbegriff beruht. Dagegen ist sie für Berechnungen direkt nicht geeignet, weshalb wir im Folgenden entsprechende Rechentechniken entwickeln werden. Diese Definition lässt die Möglichkeit zu, dass die Funktion den Wert  $\infty$  annimmt, und dass das Integral diesen Wert annimmt. Im Fall von numerischen Funktionen, die auch negative Werte annehmen können, führt man den Integralbegriff auf die Integrale der positiven und negativen Teilfunktion zurück. Dies macht aber nur dann Sinn, wenn beide Teilintegrale endlich sind.

**Definition 70.4.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann heißt  $f$  *integrierbar*, wenn die beiden Integrale  $\int_M f_+ d\mu$  und  $\int_M f_- d\mu$  endlich sind. In diesem Fall nennt man

$$\int_M f d\mu = \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu$$

das *Integral* von  $f$ .

Mit dieser Situation ergibt sich der leicht paradoxe Sprachgebrauch, dass eine nichtnegative Funktion stets ein Integral besitzt, dass aber, wenn dieses Integral unendlich ist, die Funktion nicht integrierbar ist. Die Integrierbarkeit ist, abgesehen von der vorausgesetzten Messbarkeit, die aber nahezu immer erfüllt ist, in erster Linie ein Endlichkeitsbegriff. In diese Richtung weist auch das folgende Lemma.

**Lemma 70.5.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine messbare numerische Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $f$  ist integrierbar.
- (2) Der positive und der negative Teil von  $f$  sind integrierbar.
- (3) Die Betragsfunktion  $|f|$  ist integrierbar.
- (4) Es gibt eine integrierbare messbare Funktion

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit  $|f(x)| \leq h(x)$  für alle  $x \in M$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) ist die Definition von integrierbar. Für die Äquivalenz von (2) und (3) verwendet man die Beziehung  $|f| = f_+ + f_-$ . Dabei ist der Subgraph von  $|f|$  die Vereinigung der beiden Subgraphen zu  $f_+$  bzw.  $f_-$ , wobei der Durchschnitt dieser Subgraphen aus der Menge  $\{(x, 0) \mid f(x) = 0\}$  besteht und somit das Maß 0 besitzt. Also ist<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \int_M |f| d\mu &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(f_+)) + (\mu \otimes \lambda^1)(S(f_-)) \\ &= \int_M f_+ d\mu + \int_M f_- d\mu, \end{aligned}$$

und die beiden Summanden sind genau dann endlich, wenn die Summe endlich ist. Aus (3) folgt (4), indem man  $h = |f|$  nimmt. Wenn (4) erfüllt ist, so

---

<sup>5</sup>Wir werden später sehen, dass generell das Integral mit der Addition von Funktionen verträglich ist, das haben wir hier aber noch nicht zur Verfügung.

ist der Subgraph von  $|f|$  im Subgraph von  $h$  enthalten, und die Monotonie des Maßes ergibt die Endlichkeit von  $\int_M |f| d\mu$ .  $\square$

Für eine messbare Teilmenge  $T \subseteq M$  setzt man

$$\int_T f d\mu = \int_T (f|_T) d\mu,$$

d.h. man schaut sich die auf den Teilmaßraum eingeschränkte Funktion an. Man könnte genauso gut die Funktion  $f$  durch diejenige Funktion  $\tilde{f}$  ersetzen, die auf  $T$  mit  $f$  übereinstimmt und die außerhalb davon gleich 0 ist. Wenn man die Indikatorfunktion  $e_T$  zu einer messbaren Teilmenge  $T \subseteq M$  heranzieht, so ergibt sich

$$\int_M e_T d\mu = \int_T 1 d\mu = \mu(T).$$

Diese Beschreibung des Maßes als ein Integral kann durchaus nützlich sein.

Man kann den Subgraphen schreiben als

$$S(f) = S^o(f) \uplus \Gamma(f),$$

wobei  $\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid y = f(x)\}$  der Graph ist und

$$S^o(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid y < f(x)\}$$

gesetzt wird. Das folgende Lemma zeigt, dass der Graph eine Nullmenge ist und dass man somit den Subgraphen durch dieses  $S^o(f)$  ersetzen kann. Dies ist für einige Ausschöpfungseigenschaften von Vorteil.

**Lemma 70.6.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine messbare numerische Funktion. Dann ist der Graph  $\Gamma(f)$  eine Nullmenge in  $M \times \overline{\mathbb{R}}$ .*

*Beweis.* Die Mengen  $f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}$  und  $f^{-1}(-\infty) \times \{-\infty\}$ , die beide Teilmengen des Graphen sind, sind Nullmengen in  $M \times \overline{\mathbb{R}}$ . Man kann also annehmen, dass von vornherein eine messbare Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

vorliegt. Ferner können wir annehmen, dass  $\mu$  ein endliches Maß ist, da zu einer Ausschöpfung  $M_n \uparrow M$  mit  $\mu(M_n) < \infty$  auch  $M_n \times \mathbb{R}$  eine Ausschöpfung von  $M \times \mathbb{R}$  ist. Wenn der Durchschnitt des Graphen mit allen  $M_n \times \mathbb{R}$  das Maß 0 hat, so auch der Gesamtgraph. Nehmen wir nun an, dass  $(\mu \otimes \lambda^1)(\Gamma(f)) > 0$  ist. Es ist

$$\Gamma(f) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (\Gamma(f) \cap (M \times [n, n+1]))$$

eine disjunkte abzählbare Vereinigung, so dass mindestens einer dieser „Streifen“ ein positives Maß haben muss. Wir können  $M$  durch  $f^{-1}([n, n+1])$

ersetzen und daher annehmen, dass das Bild von  $f$  in  $[n, n + 1]$  liegt. Wir betrachten die abzählbar unendlich vielen Verschiebungen

$$\Gamma(f) + q \text{ mit } q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Diese sind paarweise disjunkt und sie liegen alle in  $M \times [n, n + 2]$ . Wegen der Translationsinvarianz von  $\lambda^1$  ist auch für jedes  $q$  die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto (x, t + q),$$

maßtreu (man betrachte die Quader, die das Produktmaß festlegen), und daher besitzt jede Verschiebung des Graphen das gleiche Maß wie der Graph selbst. Aus

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (\mu \otimes \lambda^1)(\Gamma(f) + q) &= (\mu \otimes \lambda^1)\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (\Gamma(f) + q)\right) \\ &\leq (\mu \otimes \lambda^1)(M \times [n, n + 2]) \\ &= \mu(M) \cdot 2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

ergibt sich ein Widerspruch. □

## 70.2. Die Tschebyschow-Abschätzung.



Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (1821-1894)

Die folgende Aussage nennt man Tschebyschow-Abschätzung oder Tschebyschow-Ungleichung.

**Lemma 70.7.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Abschätzung*

$$\int_M f \, d\mu \geq a \cdot \mu\{x \in M \mid f(x) \geq a\}.$$

*Beweis.* Es sei  $T = \{x \in M \mid f(x) \geq a\}$ . Dann ist

$$T \times [0, a] \subseteq S(f),$$

also

$$a \cdot \mu(T) = (\mu \otimes \lambda^1)(T \times [0, a]) \leq (\mu \otimes \lambda^1)(S(f)) = \int_M f d\mu.$$

□

### 70.3. Bildmaße und allgemeine Transformationsformel.

**Satz 70.8.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $(N, \mathcal{B})$  ein Messraum und*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine messbare Abbildung. Es sei  $\nu$  das Bildmaß von  $\mu$  unter  $\varphi$ , das ebenfalls als  $\sigma$ -endlich vorausgesetzt sei, und es sei*

$$f : N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine  $\nu$ -integrierbare Funktion. Dann ist auch  $f \circ \varphi$   $\mu$ -integrierbar, und es gilt*

$$\int_N f d\nu = \int_M (f \circ \varphi) d\mu.$$

*Beweis.* Für nicht negatives  $f$  ergibt sich dies unter Verwendung von Aufgabe 70.1 und Aufgabe 66.1 aus

$$\begin{aligned} \int_N f d\nu &= (\nu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)((\varphi \times \text{Id})^{-1}(S(f))) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(f \circ \varphi)) \\ &= \int_M (f \circ \varphi) d\mu. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch der allgemeine Fall. □

## 71. VORLESUNG

### 71.1. Ausschöpfungseigenschaften.

Die folgenden Rechenregeln für Integrale beruhen auf dem Ausschöpfungssatz für Maße. Man kann den Subgraphen sowohl dadurch ausschöpfen, dass man die Grundmenge ausschöpft, als auch dadurch, dass man die Funktion ausschöpft, also durch andere Funktionen approximiert.

**Lemma 71.1.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sei  $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$  eine abzählbare Zerlegung in messbare Teilmengen. Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f d\mu = \sum_{i \in I} \left( \int_{M_i} f d\mu \right).$$

*Beweis.* Die beiden Subgraphen zum positiven und zum negativen Teil, also  $S(f_+)$  und  $S(f_-)$ , haben endliches Maß, und es gilt  $S(f_+) = \biguplus_{i \in I} S(f_+, M_i)$  und  $S(f_-) = \biguplus_{i \in I} S(f_-, M_i)$ . Daher folgt die Aussage für die beiden Teile direkt aus der  $\sigma$ -Additivität des Maßes  $\mu \otimes \lambda^1$ . Daraus folgt die Aussage für  $f$  aus dem großen Umordnungssatz.  $\square$

**Satz 71.2.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sei  $M_n, n \in \mathbb{N}$ , eine messbare Ausschöpfung von  $M$ . Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{M_n} f d\mu \right).$$

*Beweis.* Durch Betrachten von  $f_+$  und  $f_-$  kann man annehmen, dass  $f$  nichtnegativ ist. Dann schöpfen die Subgraphen  $S(f, M_n)$  den Subgraphen  $S(f, M)$  aus und die Aussage folgt aus Lemma 64.4.  $\square$

Den folgenden Satz nennt man *Satz von der monotonen Konvergenz* oder *Satz von Beppo Levi*.

**Satz 71.3.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sei*

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen mit der Grenzfunktion  $f$ . Dann gilt*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu.$$

*Beweis.* Zunächst ist die Grenzfunktion nach Korollar 69.8 wieder messbar, so dass das Integral links wohldefiniert ist. Für die „halboffenen“ Subgraphen  $S^o(f_n)$  gilt die Beziehung  $S^o(f_n) \uparrow S^o(f)$ . Daher ist nach Lemma 64.4

$$(\mu \otimes \lambda^1)(S^o(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \lambda^1)(S^o(f_n))$$

Wegen Lemma 70.6 ist dies die Behauptung.  $\square$

**Korollar 71.4.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sei*

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

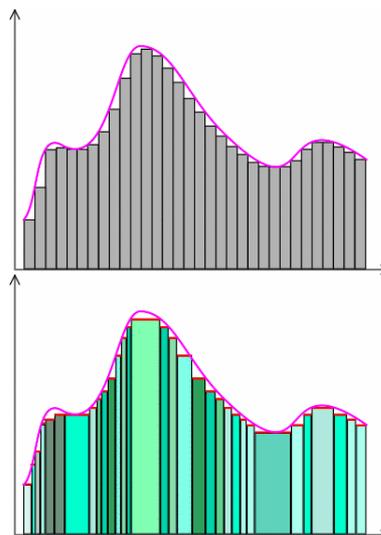
*eine messbare nichtnegative numerische Funktion. Dann ist das Integral  $\int_M f d\mu$  gleich dem Supremum der Integrale zu allen einfachen Funktionen  $s \leq f$ .*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 69.11 und aus Satz 71.3.  $\square$

Hierbei ist wichtig, dass man beliebige einfache Funktionen und nicht nur, wie beim Riemann-Integral, die Treppenfunktionen zur Verfügung hat.

## 71.2. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral.

Diese Animation zeigt, wie der Flächeninhalt unter dem Graphen mit (äquidistanten) Treppenfunktionen (Riemann-Integral) und mit einfachen Funktionen (Lebesgue-Integral) approximiert wird.



**Satz 71.5.** *Es sei*

$$f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine messbare Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_I f \, d\lambda^1 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $f$  nichtnegativ ist. Es seien

$$s, t : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine obere bzw. eine untere Treppenfunktion, wobei wir die untere Treppenfunktion ebenfalls als nichtnegativ annehmen können. Dann gilt aufgrund der Monotonie des Maßes die Beziehung

$$\int_I s \, d\lambda^1 \leq \int_I f \, d\lambda^1 \leq \int_I t \, d\lambda^1.$$

Die beiden Subgraphen zu den Treppenfunktionen  $s$  und  $t$  sind dabei jeweils eine endliche disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Daher sind die beiden äußeren Integrale aufgrund der Definition des Produktmaßes gleich dem Treppenfunktionsintegral. Somit ist das Integral  $\int_I f \, d\lambda^1$  kleiner/gleich jeder Obersumme und größer/gleich jeder Untersumme von  $f$ . Diese Abschätzungen gelten dann auch für das Infimum der Obersummen bzw. das Supremum der Untersummen. Da diese aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit übereinsimmen, muss das maßtheoretische Integral gleich dem Riemann-Integral sein.  $\square$

Auf die Voraussetzung, dass die Riemann-integrierbare Funktion messbar ist, kann man dabei nicht verzichten.

### 71.3. Linearität des Integrals.

**Satz 71.6.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum. Es seien  $f, g$  integrierbare messbare reellwertige Funktionen auf  $M$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $af + bg$  integrierbar, und es gilt*

$$\int_M (af + bg) d\mu = a \int_M f d\mu + b \int_M g d\mu.$$

*Beweis.* Durch Betrachten des positiven und des negativen Teils kann man die Behauptung auf den Fall von nichtnegativen Funktionen und nichtnegativen Zahlen zurückführen. Wir behandeln die Additivität und die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation getrennt. Nach Lemma 69.11 gibt es wachsende Folgen  $f_n$  bzw.  $g_n$  von messbaren einfachen Funktionen, die punktweise gegen  $f$  bzw.  $g$  konvergieren. Dann konvergiert auch  $f_n + g_n$  wachsend und punktweise gegen  $f + g$ . Zwei einfache Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  können wir bzgl. einer geeigneten Zerlegung  $C_i$ ,  $i \in I$ , von  $M$  als  $\alpha = \sum_{i \in I} a_i \cdot e_{C_i}$  und  $\beta = \sum_{i \in I} b_i \cdot e_{C_i}$  schreiben. Damit gilt (bei  $\alpha, \beta$  messbar)

$$\begin{aligned} \int_M (\alpha + \beta) d\mu &= \int_M \left( \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \cdot e_{C_i} \right) d\mu \\ &= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \mu(C_i) \\ &= \sum_{i \in I} a_i \mu(C_i) + \sum_{i \in I} b_i \mu(C_i) \\ &= \int_M \left( \sum_{i \in I} a_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu + \int_M \left( \sum_{i \in I} b_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu \\ &= \int_M \alpha d\mu + \int_M \beta d\mu \end{aligned}$$

und die Verträglichkeit mit der Summe gilt für einfache Funktionen. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 7.10 gilt

$$\begin{aligned} \int_M (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_M (f_n + g_n) d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_M f_n d\mu + \int_M g_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_M f_n d\mu \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_M g_n d\mu \right) \\ &= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu. \end{aligned}$$

Der Beweis für die skalare Multiplikation verläuft ähnlich. □

#### 71.4. Weitere Konvergenzsätze.

Wir erinnern daran, dass ein Häufungspunkt einer Folge in einem metrischen Raum ein Punkt mit der Eigenschaft ist, dass es in jeder  $\epsilon$ -Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder gibt.

**Definition 71.7.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und es sei  $H$  die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann setzt man

$$\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \inf (H)$$

und

$$\limsup ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup (H)$$

und nennt diese Zahlen den *Limes inferior* bzw. den *Limes superior* der Folge. (Wenn es keinen Häufungspunkt gibt, so ist dies als  $\infty$  bzw. als  $-\infty$  zu interpretieren).

Für eine Folge von numerischen Funktionen wird der Limes inferior und der Limes superior punktweise definiert. Für messbare Funktionenfolgen sind dies wieder messbare Funktionen, siehe Aufgabe 71.7.

Die folgende Aussage heißt *Lemma von Fatou*.

**Satz 71.8.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und es sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Dann gilt

$$\int_M \liminf (f_n) d\mu \leq \liminf \left( \int_M f_n d\mu \right)$$

*Beweis.* Die Funktionen  $f = \liminf (f_n)$  und  $h_n = \inf (f_m, m \geq n)$  sind nach Aufgabe 71.7 bzw. Lemma 69.4 messbar, und die Folge  $h_n$  konvergiert Aufgabe 71.6 wachsend gegen  $f$ . Wir können den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_M h_n d\mu \right).$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist wegen  $h_k \leq f_m$  für alle  $m \geq k$  auch  $\int_M h_k d\mu \leq \int_M f_m d\mu$  für alle  $m \geq k$  und damit

$$\int_M h_k d\mu \leq \liminf_{n \geq k} \left( \int_M f_n d\mu \right) = \liminf_{n \geq 0} \left( \int_M f_n d\mu \right),$$

wobei die Gleichheit rechts darauf beruht, dass Häufungspunkte nicht von endlich vielen Folgengliedern abhängen. Dies ergibt insgesamt die Behauptung.  $\square$

Wir kommen zum *Satz von der majorisierten Konvergenz*, der auch *Satz von Lebesgue* heißt.

**Satz 71.9.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und es sei*

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen. Es gebe eine messbare integrierbare Funktion*

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*mit  $|f_n(x)| \leq h(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in M$ . Dann ist auch die Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  integrierbar, und es gilt*

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu.$$

*Beweis.* Die Majorante  $h$  sichert nach Lemma 70.5, dass die  $f_n$  integrierbar sind; da diese Abschätzung auch für die Grenzfunktion gilt, ist diese ebenfalls integrierbar. Wir wenden das Lemma von Fatou auf die beiden nichtnegativen Funktionenfolgen  $(h + f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an und erhalten unter Verwendung der Linearität einerseits

$$\begin{aligned} \int_M h \, d\mu + \int_M f \, d\mu &= \int_M (h + f) \, d\mu \\ &\leq \liminf \left( \int_M (h + f_n) \, d\mu \right) \\ &= \liminf \left( \int_M h \, d\mu + \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_M h \, d\mu + \liminf \left( \int_M f_n \, d\mu \right) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \int_M h \, d\mu - \int_M f \, d\mu &= \int_M (h - f) \, d\mu \\ &\leq \liminf \left( \int_M (h - f_n) \, d\mu \right) \\ &= \liminf \left( \int_M h \, d\mu - \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_M h \, d\mu - \limsup \left( \int_M f_n \, d\mu \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_M f \, d\mu &\leq \liminf \left( \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &\leq \limsup \left( \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &\leq \int_M f \, d\mu. \end{aligned}$$

Daher stimmt der Limes inferior von  $\int_M f_n \, d\mu$  mit dem Limes superior davon überein und somit ist dies Aufgabe 71.5 gleich dem Limes von  $\int_M f_n \, d\mu$ .  $\square$

## 72. VORLESUNG

## 72.1. Parameterabhängige Integrale.

Wie diskutieren nun, wie Integrale von einem Parameter abhängen, der sich in einem metrischen Raum bewegt. Dazu muss man in erster Linie das Verhalten bzgl. einer Folge verstehen, so dass man die Ergebnisse der letzten Vorlesung anwenden kann. Der folgende Stetigkeitssatz ist eine weitreichende Verallgemeinerung von Satz 36.2.

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $E$  ein metrischer Raum und

$$f : E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine Funktion. Dann gibt es einerseits zu jedem  $x \in M$  die Funktion

$$f(-, x) : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \longmapsto f_x(t) = f(t, x),$$

die man auf Stetigkeit untersuchen kann, und andererseits für jeden „Parameter“  $t \in E$  die Funktion

$$f(t, -) : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto f_t(x) = f(t, x)$$

und dazu (im Falle der Integrierbarkeit) das Integral  $\int_M f_t d\mu$ . Wir interessieren uns für die Abhängigkeit von diesem Integral vom Parameter  $t \in E$ . Um deutlich zu machen, dass über  $M$  (nicht über  $E$ ) integriert wird, schreiben wir manchmal  $\int_M f_t d\mu(x)$  oder  $\int_M f(t, x) d\mu(x)$ , wobei  $x$  die Variable zu  $M$  bezeichne.

**Satz 72.1.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $E$  ein metrischer Raum und*

$$f : E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

*eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.*

- (1) *Für alle  $t \in E$  ist die Funktion  $x \mapsto f(t, x)$  messbar.*
- (2) *Für alle  $x \in M$  ist die Funktion  $t \mapsto f(t, x)$  stetig in  $t_0 \in E$ .*
- (3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*mit*

$$|f(t, x)| \leq h(x)$$

*für alle  $t \in E$  und alle  $x \in M$ .*

*Dann ist die Funktion*

$$\varphi : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

*wohldefiniert und stetig in  $t_0$ .*

*Beweis.* Die Integrierbarkeit der einzelnen Funktionen  $x \mapsto f(t, x)$  folgt aus Lemma 70.5. Wir müssen die Stetigkeit dieser Funktion in  $t_0$  zeigen. Wir wenden das Folgenkriterium für die Stetigkeit an, sei also  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $E$ , die gegen  $t_0$  konvergiert. Wir setzen  $f_n(x) = f(s_n, x)$ . Aufgrund der zweiten Voraussetzung konvergiert die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  und daher konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $f(t_0, -)$ . Wegen der dritten Bedingung kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n(x) d\mu(x) = \int_M f(t_0, x) d\mu(x) = \varphi(t_0).$$

□

**Satz 72.2.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $I$  ein nicht-leeres offenes Intervall und*

$$f : I \times M \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

*eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.*

- (1) *Für alle  $t \in I$  ist die Funktion  $x \mapsto f(t, x)$  integrierbar.*
- (2) *Für alle  $x \in M$  ist die Funktion  $t \mapsto f(t, x)$  (stetig) differenzierbar.*
- (3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*mit*

$$|f'(t, x)| \leq h(x)$$

*für alle  $t \in I$  und alle  $x \in M$ .*

*Dann ist die Funktion*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, -) d\mu(x),$$

*(stetig) differenzierbar in  $t$ , die Zuordnung  $x \mapsto f'(t, x)$  ist integrierbar und es gilt die Formel*

$$\varphi'(t) = \int_M f'(t, x) d\mu(x).$$

*Beweis.* Der Differenzenquotient für  $\varphi$  in einem Punkt  $t \in I$  und  $s \neq t$  ist

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} = \frac{\int_M f(s, x) d\mu(x) - \int_M f(t, x) d\mu(x)}{s - t}.$$

Wir müssen für jede Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $I$  mit  $s_n \neq t$ , die gegen  $t$  konvergiert, zeigen, dass die zugehörige Folge der Differenzenquotienten konvergiert. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein  $c \in I$  mit

$$\left| \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} \right| = |f'(c, x)| \leq h(x).$$

Da  $h$  integrierbar ist, ist auch für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Differenzenquotient als Funktion in  $x$  nach Lemma 70.5 integrierbar. Dann ist unter Verwendung der Linearität des Integrals und des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(s_n) - \varphi(t)}{s_n - t} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_M f(s_n, x) d\mu(x) - \int_M f(t, x) d\mu(x)}{s_n - t} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} d\mu(x) \\
 &= \int_M \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} \right) d\mu(x) \\
 &= \int_M f'(t, x) d\mu(x).
 \end{aligned}$$

Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus Satz 72.1.  $\square$

**Korollar 72.3.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und*

$$f : U \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

- (1) Für jedes  $z \in U$  ist die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(z, x),$$

integrierbar.

- (2) Für jedes  $x \in M$  ist die Funktion

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto f(z, x),$$

stetig differenzierbar.

- (3) Es gibt eine nichtnegative integrierbare Funktion

$$h : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, x) \right\| \leq h(x)$$

für alle  $z \in U$ , alle  $x \in M$  und alle  $i = 1, \dots, n$ .

Dann ist die Funktion

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto \varphi(z) = \int_M f(z, x) d\mu(x),$$

stetig differenzierbar und es gilt für jedes  $i = 1, \dots, n$  die Formel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(z) = \int_M \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, x) d\mu(x).$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 72.2, indem man zu  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $P \in U$  die lineare Kurve

$$\psi : I \longrightarrow U, t \longmapsto P + te_i,$$

vorschaltet und  $f \circ (\text{Id}_M \times \psi)$  betrachtet.  $\square$

## 72.2. Das Cavalieri-Prinzip.



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und  $T \subseteq M \times N$  eine messbare Teilmenge. Für jeden Punkt  $x \in M$  ist

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}.$$

Wir erinnern an Lemma 65.10, nachdem diese Mengen messbar sind. In welcher Beziehung steht  $(\mu \otimes \nu)(T)$  zur Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \nu(T(x))?$$

Bei  $N = \mathbb{R}$  und wenn  $T$  der Subgraph zu einer nichtnegativen messbaren Funktion  $f$  ist, so ist  $\lambda^1(T(x)) = f(x)$  und nach der Definition des Integrals gilt

$$(\mu \otimes \lambda^1)(T) = \int_M f(x) d\mu = \int_M \lambda^1(T(x)) d\mu.$$

Der Satz von Cavalieri besagt, dass die Gleichheit zwischen links und rechts für beliebige messbare Teilmengen  $T$  gilt. Um diesen Satz überhaupt formulieren zu können, müssen wir zunächst sicherstellen, dass die Funktion  $x \mapsto \nu(T(x))$  messbar ist.

**Lemma 72.4.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei  $T \subseteq M \times N$  eine messbare Teilmenge. Dann sind die Funktionen*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \nu(T(x)),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \mu(T(y)),$$

messbar.

*Beweis.* Wir zeigen die Messbarkeit der ersten Funktion  $x \mapsto \nu(T(x))$ . Dabei reduzieren wir zuerst auf die Situation in der  $N$  endlich ist. Nach Voraussetzung gibt es eine abzählbare messbare Ausschöpfung  $N_n \uparrow N$  mit  $\nu(N_n) < \infty$ . Wir setzen  $T_n = T \cap M \times N_n$ . Dann ist  $T_n \uparrow T$  und damit auch  $T_n(x) \uparrow T(x)$  für jedes  $x \in M$ . Wenn wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Messbarkeit von  $x \mapsto \nu(T_n(x))$  gezeigt haben, so folgt sie wegen Lemma 69.4 auch für  $x \mapsto \nu(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(T_n(x))$ . Wir können also annehmen, dass  $\nu(N) < \infty$  ist.

Wir wollen zeigen, dass für jedes  $T \subseteq M \times N$  die Funktion  $x \mapsto \nu(T(x))$  messbar ist. Wie setzen

$$\mathcal{D} = \{T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid \text{Die Funktion } x \mapsto \nu(T(x)) \text{ ist messbar}\}$$

und müssen zeigen, dass dies die gesamte Produkt- $\sigma$ -Algebra ist. Zunächst gehören die messbaren Quader  $A \times B$  zu  $\mathcal{D}$ . Es ist ja

$$(A \times B)(x) = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit ist  $\nu(T(x)) = \nu(B) \cdot e_A(x)$  messbar. Wir zeigen, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist. Es ist  $M \times N \in \mathcal{D}$ . Sei  $S \subseteq T$  Teilmengen, die zu  $\mathcal{D}$  gehören. Dann ist  $(T \setminus S)(x) = T(x) \setminus S(x)$  und  $\nu((T \setminus S)(x)) = \nu(T(x)) - \nu(S(x))$  ist nach Lemma 69.3 messbar. Für eine disjunkte abzählbare Vereinigung  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  ist  $T(x) = \bigsqcup_{i \in I} T_i(x)$ . Wenn  $T_i \in \mathcal{D}$  ist für alle  $i \in I$ , so ist die Funktion  $x \mapsto \nu(T(x)) = \sum_{i \in I} \nu(T_i(x))$  nach Korollar 69.8 wieder messbar. Damit ist insgesamt  $\mathcal{D}$  ein Dynkinsystem, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem aller Quader für die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  enthält. Deshalb ist  $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  nach Lemma 62.10.  $\square$

Wir werden im Folgenden die Notation  $\int_M f(x) d\mu(x)$  verwenden, die betont, dass die Funktion  $f$  von  $x \in M$  abhängt. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es um einen Produktraum  $M \times N$  geht und Verwechslungen möglich sind.

**Satz 72.5.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume. Dann gilt für alle messbaren Teilmengen  $T \subseteq M \times N$  die Beziehung*

$$(\mu \otimes \nu)(T) = \int_M \nu(T(x)) d\mu(x) = \int_N \mu(T(y)) d\nu(y).$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, T \longmapsto \int_M \nu(T(x)) d\mu(x),$$

ein Maß auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra ist. Sei dazu  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  eine abzählbare Zerlegung in paarweise disjunkte messbare Teilmengen. Nach Aufgabe 72.1

ist

$$\begin{aligned}
 \int_M \nu(T(x)) d\mu &= \int_M \nu\left(\bigoplus_{i \in I} T_i\right)(x) d\mu \\
 &= \int_M \nu\left(\bigcup_{i \in I} T_i(x)\right) d\mu \\
 &= \int_M \sum_{i \in I} \nu(T_i(x)) d\mu \\
 &= \sum_{i \in I} \int_M \nu(T_i(x)) d\mu,
 \end{aligned}$$

so dass die  $\sigma$ -Additivität erfüllt ist. Für einen Quader  $A \times B$  ist

$$\int_M \nu((A \times B)(x)) d\mu = \int_A \nu(B) d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes für das Produktmaß muss daher das durch das Integral definierte Maß mit dem Produktmaß übereinstimmen.  $\square$

### 73. VORLESUNG

**Korollar 73.1.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und*

$$v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi_v : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n, (x, y) \longmapsto (x, y + v(x)),$$

*bijektiv und maßtreu.*



*Beweis.* Die Abbildung  $\varphi_v$  ist messbar nach Lemma 65.11 und nach Lemma 69.3. Sie ist ferner bijektiv, die Umkehrabbildung ist  $\varphi_{-v}$ . Sei  $T \subseteq M \times N$  messbar. Wir müssen

$$(\mu \otimes \lambda^n)(T) = (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T))$$

zeigen. Für  $x \in M$  ist

$$(\varphi_v^{-1}(T))(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \varphi_v^{-1}(T)\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes besitzt diese Menge das gleiche Maß wie

$$\{y + v(x) \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{z \in \mathbb{R}^n \mid (x, z) \in T\} \\
&= T(x).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Integrationsversion des Cavalieri-Prinzips gilt also

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes \lambda^n)(T) &= \int_M \lambda^n(T(x)) d\mu(x) \\
&= \int_M \lambda^n((\varphi_v^{-1}(T))(x)) d\mu(x) \\
&= (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T)).
\end{aligned}$$

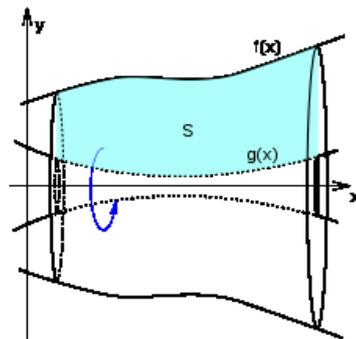
□

### 73.1. Einige Volumina.

**Definition 73.2.** Zu einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die  $x$ -Achse).



**Satz 73.3.** Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto f(t),$$

eine nichtnegative messbare Funktion und sei  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  der Rotationskörper zum Subgraphen von  $f$  um die  $x$ -Achse. Dann besitzt  $K$  das Volumen

$$\lambda^3(K) = \pi \cdot \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t) = \pi \cdot \int_a^b (f(t))^2 dt,$$

wobei für die zweite Formel  $f$  als stetig vorausgesetzt sei.

*Beweis.* Nach dem Cavalieri-Prinzip und nach der Formel für den Flächeninhalt des Kreises ist

$$(\lambda \otimes \lambda^2)(K) = \int_{[a,b]} \lambda^2(K(t)) d\lambda(t) = \pi \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t).$$

Für stetiges  $f$  ist dies nach Satz 71.5 gleich

$$\pi \int_a^b (f(t))^2 dt.$$

□

Den Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers zu einer (differenzierbaren) Funktion werden wir in Satz 86.1 berechnen.

**Beispiel 73.4.** Wir wollen das Volumen einer  $n$ -dimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius  $r$  berechnen, also von

$$B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wegen Satz 68.2 gilt dabei  $\lambda^n(B_n(r)) = r^n \lambda^n(B_n(1))$ , d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

Ihr Volumen bezeichnen wir mit  $\beta_n = \lambda^n(B_n)$ , zur Berechnung gehen wir induktiv vor (es ist  $\beta_1 = 2$ ). Wir betrachten

$$B_n \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Für jedes fixierte  $h$ ,  $-1 \leq h \leq 1$ , kann man den Querschnitt als

$$\begin{aligned} T(h) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in B_n \mid x_n = h\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1, x_n = h\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - h^2\} \\ &= B_{n-1}(\sqrt{1 - h^2}) \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius  $\sqrt{1-h^2}$ . Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned} \beta_n &= \lambda^n(B_n(1)) \\ &= (\lambda^{n-1} \otimes \lambda^1)(B_n(1)) \\ &= \int_{[-1,1]} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(\sqrt{1-h^2})) d\lambda^1 \\ &= \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) d\lambda^1 \\ &= \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} d\lambda^1 \\ &= \beta_{n-1} \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} d\lambda^1. \end{aligned}$$

Dabei können wir das Integral rechts wegen Satz 71.5 und Korollar 32.7 über Stammfunktionen ausrechnen. Die Substitution  $h = \sin t$  liefert

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{1-h^2})^{n-1} dh = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Im Beweis zu Korollar 33.4 wurden diese Integrale berechnet; mit  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$  gilt

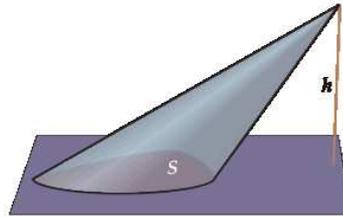
$$a_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{bei } n \text{ gerade } \geq 2, \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n(n-2)\cdots 5 \cdot 3} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit diesen Formeln und der Rekursionsvorschrift  $\beta_n = 2\beta_{n-1}a_n$  kann man schließlich mit Hilfe der Fakultätsfunktion das Kugelvolumen als

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\text{Fak}(n/2)}$$

schreiben. Diese Formel ergibt sich durch Induktion aus Satz 37.6.

Speziell ergibt sich für die Fläche des Einheitskreises der Wert  $\pi$  und für das Volumen der Einheitskugel der Wert  $\frac{4}{3}\pi$ .



**Definition 73.5.** Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $P \in \mathbb{R}^{n+1}$  ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B, t \in [0, 1]\}$$

den *Kegel* zur Basis  $B$  mit der Spitze  $P$ .

**Satz 73.6.** Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar,  $P \in \mathbb{R}^{n+1}$  ein Punkt und  $K_B$  der zugehörige Kegel. Es sei  $h = P_{n+1}$  die letzte Koordinate von  $P$ . Dann ist  $K_B$  ebenfalls messbar, und es gilt

$$\lambda^{n+1}(K_B) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(B) \cdot |h|.$$

*Beweis.* Bei  $h = 0$  liegt der gesamte Kegel in  $\mathbb{R}^n$  und sein  $\lambda^n$ -Maß ist 0 nach Lemma 67.11, sei also  $h \neq 0$ . Der Durchschnitt von  $K = K_B$  mit der durch  $x_{n+1} = t$ ,  $t$  zwischen 0 und  $h$ , gegebenen Hyperebene ist

$$K(t) = \{(x_1, \dots, x_n, t) \mid (x_1, \dots, x_n, t) \in K_B\} = \left\{P + \frac{(h-t)}{h}(Q-P) \mid Q \in B\right\}.$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 68.3 ist dessen Volumen gleich  $|\frac{h-t}{h}|^n \lambda^n(B)$ . Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit  $s = h - t$ )

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(K_B) &= \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s)) ds \\ &= \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot \left(\frac{s}{|h|}\right)^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1} |h|^{n+1} \end{aligned}$$

$$= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|.$$

□

**Beispiel 73.7.** Wir stellen eine falsche Berechnung der Kugeloberfläche an, die auf einem falsch interpretierten Cavalieri-Prinzip beruht. Wir betrachten die obere Einheitshalbkugel. Zu jeder Höhe  $h \in [0, 1]$  ist der Querschnitt der Kugeloberfläche mit der durch  $z = h$  definierten Ebene eine Kreislinie mit dem Radius  $\sqrt{1-h^2}$ . Der Kreisumfang eines solchen Kreises ist  $2\pi\sqrt{1-h^2}$ . Wir wollen die Oberfläche der oberen Halbkugel berechnen, indem wir diese Umfänge über die Höhe aufintegrieren. Für die Kugeloberfläche würde sich dann (mit der Substitution  $h = \sin s$ )

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 2\pi\sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds \\ &= 4\pi \frac{1}{2} (s + \sin s \cos s) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \frac{\pi}{2} \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

Der wahre Wert ist aber mit  $4\pi$  deutlich größer.

### 73.2. Der Satz von Fubini.

Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Der Satz von Fubini bringt das Integral  $\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu)$  mit dem Integral über  $M$  der Funktion

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

in Verbindung. Er erlaubt es, Integrale über einem höherdimensionalen Bereich auf eindimensionale Integrale zurückzuführen. Sein Beweis beruht auf dem Cavalieri-Prinzip, angewendet auf den Produktraum  $M \times N \times \overline{\mathbb{R}}$ , und ist prinzipiell nicht schwierig. Allerdings muss man bei einigen Details (Nichtnegativität, undefiniertheitsstellen, Nullmengen) doch präzise sein, so dass wir einige vorbereitende Lemmata anführen.

Eine Teilmenge  $Z \subseteq M$  eines Maßraumes heißt *Nullmenge*, wenn  $\mu(Z) = 0$  ist. Bspw. ist jede abzählbare Menge in  $\mathbb{R}^n$  eine Nullmenge. Manchmal verwendet man diesen Begriff auch für nicht notwendigerweise messbare Teilmengen  $Z$ , für die es eine messbare Menge  $Z \subseteq Z'$  gibt mit  $\mu(Z') = 0$ . Für

eine Eigenschaft  $E$ , die für die Punkte eines Maßraumes erklärt ist, sagt man, dass die Eigenschaft *fast überall* gilt, wenn die Ausnahmemenge

$$\{x \in M \mid E(x) \text{ gilt nicht}\}$$

eine Nullmenge ist. Insbesondere spricht man von *fast überall definierten Funktionen*. Da es bei Integralen nicht auf Nullmengen des Definitionsbereiches ankommt, kann man häufig solche „kleinen“ undefiniertheitsstellen ignorieren.

**Lemma 73.8.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Für jedes  $x \in M$  sind die Funktionen*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto f(x, y),$$

*und für jedes  $y \in N$  sind die Funktionen*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto f(x, y),$$

*messbar.*

(2) *Die Funktion*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

*und die Funktion*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

*sind messbar.*

(3) *Es gilt*

$$\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) = \int_M \left( \int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_N \left( \int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

*Beweis.* (1) folgt direkt aus der Messbarkeit der Inklusionen

$$M \longrightarrow M \times N, x \longmapsto (x, y),$$

für jedes  $y \in N$ . (2) folgt aus Lemma 72.4. (3). Nach Satz 72.5, angewendet auf das Produkt  $M \times (N \times \overline{\mathbb{R}})$ , ist

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= (\mu \otimes \nu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= \int_M (\nu \otimes \lambda^1)((S(f))(x)) d\mu \\ &= \int_M \left( \int_N f(x, y) d\nu \right) d\mu. \end{aligned}$$

Da man die Rollen von  $M$  und  $N$  vertauschen kann, ergibt sich auch die andere Darstellung.  $\square$

**Lemma 73.9.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine messbare Funktion. Dann ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn*

$$\int_M \left( \int_N |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ oder } \int_N \left( \int_M |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

*endlich ist.*

*Beweis.* Die Integrierbarkeit von  $f$  ist nach Lemma 70.5 äquivalent zur Integrierbarkeit der Betragsfunktion, was die Endlichkeit von  $\int_{M \times N} |f| d(\mu \otimes \nu)$  bedeutet. Die Aussage folgt daher aus Lemma 73.8.  $\square$

Wir kommen nun zum *Satz von Fubini*.

**Satz 73.10.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine integrierbare Funktion. Dann sind die beiden Funktionen*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

*und*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

*fast überall reellwertig und fast überall integrierbar, und es gilt*

$$\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) = \int_M \left( \int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_N \left( \int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung und nach Lemma 73.9 ist die Funktion  $x \mapsto \int_N |f(x, y)| d\nu(y)$  integrierbar. Dies bedeutet insbesondere, dass das Integral  $\int_N |f(x, y)| d\nu(y)$  fast überall einen endlichen Wert hat, dass es also eine Nullmenge  $Z \subseteq M$  gibt mit  $\int_N |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$  für  $x \notin Z$ . Daher sind nach Lemma 70.5 für  $x \notin Z$  die Integrale  $\int_N f(x, y) d\nu(y)$  definiert und endlich, und dies gilt ebenso für die positiven und negativen Teile  $f_+(x, y)$  und  $f_-(x, y)$ .

Da sich Integrale nicht ändern, wenn man im Integrationsgebiet eine Nullmenge weglässt, und da  $Z \times N$  eine Nullmenge in der Produktmenge ist, kann man  $M$  durch  $M \setminus Z$  ersetzen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} & \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{M \times N} (f_+ - f_-) d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{M \times N} f_+ d(\mu \otimes \nu) - \int_{M \times N} f_- d(\mu \otimes \nu) \end{aligned}$$

und wenden auf die beiden Summanden Lemma 73.8 an, so dass dies gleich

$$\begin{aligned}
 &= \int_M \left( \int_N f_+(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) - \int_M \left( \int_N f_-(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
 &= \int_M \left( \int_N (f_+(x, y) - f_-(x, y)) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
 &= \int_M \left( \int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)
 \end{aligned}$$

ist. □

## 74. VORLESUNG

### 74.1. Folgerungen aus dem Satz von Fubini.

**Beispiel 74.1.** Wir wollen das Integral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck  $Q = [-2, 1] \times [0, 2]$  mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
 \int_Q f d\lambda^2 &= \int_0^2 \left( \int_{-2}^1 (x^2 - xy + 2y^3) dx \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left( \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 2y^3x \right) \Big|_{-2}^1 \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left( 3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\
 &= \left( 3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) \Big|_0^2 \\
 &= 6 + 3 + 24 \\
 &= 33.
 \end{aligned}$$

**Korollar 74.2.** *Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und es seien  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $g : N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion*

$$fg : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \longmapsto f(x) \cdot g(y),$$

integrierbar und es gilt

$$\int_{M \times N} fg d(\mu \otimes \nu) = \int_M f d\mu \cdot \int_N g d\nu.$$

*Beweis.* Wir nehmen zuerst  $f$  und  $g$  als nichtnegativ an. Dann gilt nach Satz 73.10

$$\int_{M \times N} fg d(\mu \otimes \nu) = \int_M \left( \int_N (fg)(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \left( \int_N f(x)g(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_M f(x) \left( \int_N g(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \left( \int_N g(y) d\nu(y) \right) \cdot \left( \int_M f(x) d\mu(x) \right).
\end{aligned}$$

Für beliebige integrierbare Funktionen folgt daraus, angewendet auf die Betragsfunktionen, zunächst die Integrierbarkeit des Produkts und daraus mit derselben Rechnung die Formel.  $\square$

### 74.2. Dichten.

Die bisher bewiesenen Eigenschaften des Integrals erlauben es, ausgehend von einem Maß und einer integrierbaren Funktion neue Maße zu definieren.

**Definition 74.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und es sei

$$g : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann nennt man das für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq M$  durch

$$\nu(T) := \int_T g d\mu$$

definierte Maß auf  $M$  das *Maß zur Dichte  $g$* . Es wird mit  $g\mu$  bezeichnet.

**Bemerkung 74.4.** Die Vorstellung, die hinter einer Dichte liegt und zu dem Namen geführt hat, ist die physikalische Dichte eines Körpers. Zu einem Körper im Raum berechnet das Borel-Lebesgue-Maß das Volumen. Wenn man aber an der Masse dieses Körpers interessiert ist, so reicht die Kenntnis des Volumens nicht aus, es sei denn, der Körper ist homogen und besitzt überall eine konstante Dichte. In diesem Fall ist die Masse proportional zum Volumen. Bei einem nicht homogenen Körper hingegen muss man wissen, wie sich die Masse auf dem Körper verteilt. Eine solche Massenverteilung wird durch eine Dichtefunktion beschrieben, die jedem Punkt des Körpers die „infinitesimale Dichte“ in diesem Punkt zuordnet. Die Gesamtmasse ergibt sich dann durch Integration dieser Dichte bzgl. des Volumenmaßes.

### 74.3. Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen.

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis der Transformationsformel.

**Lemma 74.5.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung. Es sei  $S \subseteq G$  eine Nullmenge. Dann ist auch  $\varphi(S)$  eine Nullmenge.

*Beweis.* Es gelte

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

mit einer Lipschitz-Konstanten  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zunächst ist für jeden Würfel  $W \subseteq G$  mit der Kantenlänge  $\delta$  das Bild  $\varphi(W)$  in einem Ball mit einem Radius  $\leq n\delta L$  enthalten. Daher gibt es ein  $c > 0$  mit

$$\lambda^n(\varphi(W)) \leq c\lambda^n(W)$$

für alle Würfel. Diese Abschätzung gilt dann auch für alle Quader, da diese beliebig nahe durch Würfel approximiert werden können.

Da  $S$  eine messbare Nullmenge ist, gibt es aufgrund der Konstruktion des Borel-Lebesgue-Maßes über das äußere Maß zu jedem  $\epsilon > 0$  eine abzählbare Überpflasterung

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$$

mit Quadern  $Q_i$  und mit

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \epsilon.$$

Daher gilt  $\varphi(S) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)$  und somit

$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(S)) &\leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} c\lambda^n(Q_i) \\ &= c \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq c\epsilon. \end{aligned}$$

Da man  $\epsilon$  beliebig klein wählen kann, muss  $\varphi(S)$  eine Nullmenge sein.  $\square$

**Korollar 74.6.** *Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $S \subseteq G$  eine Nullmenge. Dann ist auch  $\varphi(S)$  eine Nullmenge.*

*Beweis.* Nach (einem Spezialfall von) Lemma 52.10 ist  $\varphi$  lokal Lipschitz-stetig. Die Nullmenge  $S$  kann man abzählbar überdecken mit offenen Mengen, worauf  $\varphi$  Lipschitz-stetig ist. Die Aussage folgt dann aus Lemma 74.5.  $\square$

#### 74.4. Die Transformationsformel für Quader.

**Lemma 74.7.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei  $Q \subseteq G$  ein kompakter Quader. Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \lambda^n(Q) \cdot \min(|(J(\varphi))(x)|, x \in Q) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &\leq \lambda^n(Q) \cdot \max(|(J(\varphi))(x)|, x \in Q). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir setzen  $j(x) = |\det(D\varphi)_x|$ . Wir beweisen zuerst die Abschätzung nach oben. Es gibt ein  $c \geq 0$  mit  $\lambda^n(\varphi(Q)) = c \cdot \lambda^n(Q)$  und wir müssen  $c \leq \max(j(x), x \in Q)$  zeigen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Teilquadern  $Q_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mit der Eigenschaft

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) \geq c \cdot \lambda^n(Q_m).$$

Es sei  $Q_0 = Q$ . Für den Induktionsschluss von  $m$  auf  $m+1$  betrachten wir sämtliche  $2^n$  Teilquader von  $Q_m$  mit halbiertem Kantenlänge. Würden diese Teilquader  $K_i$  alle die Ungleichung  $\lambda^n(\varphi(K_i)) < c \cdot \lambda^n(K_i)$  erfüllen, so ergebe sich durch Aufsummieren sofort ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Es gibt also mindestens einen Quader  $Q_{m+1} = K_i$  mit  $\lambda^n(\varphi(Q_{m+1})) \geq c \cdot \lambda^n(Q_{m+1})$ . Diese Quaderschachtelung definiert in jeder Komponente eine Intervallschachtelung und damit nach Satz 8.12 einen Punkt  $P \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q_m$ . Wegen der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes können wir  $P = 0$  und  $\varphi(P) = 0$  annehmen. Sei  $L = (D\varphi)_0$  das totale Differential. Da  $\varphi$  in 0 differenzierbar ist, gilt

$$\varphi(v) = (D\varphi)_0(v) + \|v\| r(v)$$

mit einer in 0 stetigen Abbildung  $r$ , die dort den Limes 0 besitzt. Die lineare Approximation

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto L(v) = (D\varphi)_0(v),$$

bildet jeden Quader  $K$  auf ein Parallelotop  $T = L(K)$  ab, das nach Satz 68.2 das Maß  $\lambda^n(\varphi(K)) = j(0) \cdot \lambda^n(K)$  besitzt. Wir wollen  $\varphi(K)$  mit  $L(K)$  für einen geeigneten Quader  $K$  vergleichen. Da ein Diffeomorphismus vorliegt, ist  $L$  ein Isomorphismus und daher gibt es ein  $b \geq 0$  mit  $\|v\| \leq b \|L(v)\|$ . Somit gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$\|v\| \cdot \|r(v)\| \leq \epsilon \|L(v)\|$$

für alle  $v$  mit  $\|v\| \leq \delta$ . Es sei  $K \subseteq B(0, \delta)$ ,  $0 \in K$ , ein Quader. Für  $v \in K$  ist

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - L(v)\| &= \|v\| \cdot \|r(v)\| \\ &\leq \epsilon \|L(v)\|. \end{aligned}$$

D.h. dass  $\varphi(K)$  in dem Parallelotop  $T'$  liegt, das aus  $T = L(K)$  durch Streckung mit dem Streckungsfaktor  $1 + \epsilon$  entsteht. Damit gilt

$$\lambda^n(\varphi(K)) \leq \lambda^n(T') = (1 + \epsilon)^n \cdot \lambda^n(T) = (1 + \epsilon)^n \cdot j(0) \cdot \lambda^n(K).$$

Wir nehmen an, dass  $\max(j(x), x \in Q) < c$  gilt. Dann kann man auch ein  $\epsilon > 0$  finden mit  $(1 + \epsilon)^n j(0) < c$ . Wir nehmen ein  $\delta > 0$  derart, dass die

oben beschriebene Eigenschaft bzgl. diesem  $\epsilon$  besitzt. Für  $m$  hinreichend groß kann man dann die obige Überlegung auf die Quader  $K = Q_m$  anwenden und erhält

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) < c \cdot \lambda^n(Q_m)$$

im Widerspruch zur Konstruktion dieser Quaderfolge. Wir zeigen zuerst, dass die Abschätzung nach oben nicht nur für Quader, sondern für beliebige messbare kompakte Mengen  $T$  gilt. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es eine abzählbare Überpflasterung  $Q_i, i \in I$ , von  $T$  mit

$$\lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \lambda^n(T) + \epsilon.$$

Durch Beschränkung der Kantenlängen der  $Q_i$  kann man weiter erreichen, dass alle  $Q_i$  in einer größeren ebenfalls kompakten Menge  $\tilde{T} \supseteq T$  liegen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $j$  auf  $\tilde{T}$  kann man zu gegebenem  $\tilde{\epsilon} > 0$  die  $Q_i$  so wählen, dass  $\max(j(x), x \in Q_i) \leq \max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}$  gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(T)) &\leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} (\max(j(x), x \in Q_i) \lambda^n(Q_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} ((\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \lambda^n(Q_i)) \\ &= (\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot \left(\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)\right) \\ &= (\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot (\lambda^n(T) + \epsilon). \end{aligned}$$

Da  $\epsilon$  und  $\tilde{\epsilon}$  beliebig klein gewählt werden können, gilt diese Abschätzung auch ohne  $\epsilon$  und  $\tilde{\epsilon}$ . Wir wenden nun die Abschätzung nach oben auf die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  und  $T = \varphi(Q)$  an. Als Bild einer kompakten Menge ist  $T$  kompakt. Dabei gilt aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes die Beziehung

$$(D(\varphi^{-1}))_y = ((D\varphi)_x)^{-1}$$

mit  $y = \varphi(x)$ . Dies ergibt

$$\begin{aligned} \lambda^n(Q) &\leq \max(|(D(\varphi^{-1}))_y|, y \in \varphi(Q)) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \max(|(D(\varphi^{-1}))_{\varphi(x)}|, x \in Q) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \max(|(D\varphi)_x|^{-1}, x \in Q) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda^n(Q) \cdot \min(|(D\varphi)_x|, x \in Q) \leq \lambda^n(\varphi(Q)).$$

□

## 75. VORLESUNG

## 75.1. Die Transformationsformel für Integrale.

**Korollar 75.1.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei  $Q \subseteq G$  ein kompakter Quader. Dann gilt*

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q |(J(\varphi))(x)| d\lambda^n.$$

*Beweis.* Da  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto j(x) = |(J(\varphi))(x)| = |\det(D\varphi)_x|,$$

stetig und daher nach Satz 22.11 gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader  $Q$ . D.h. zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $j(B(x, \delta)) \subseteq B(j(x), \epsilon)$  für alle  $x \in Q$ . Dann gibt es auch ein  $\tilde{\delta} > 0$  derart, dass für alle kompakten Teilquader  $K \subseteq Q$  mit maximaler Kantenlänge  $\leq \tilde{\delta}$  das Bild in einem abgeschlossenen Intervall der Länge  $2\epsilon$  liegt. Damit ist die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum von  $\{j(x) \mid x \in K\}$  maximal gleich  $2\epsilon$ .

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wir unterteilen  $Q$  in  $k^n$  kompakte Teilquader, indem wir jede Quaderkante in  $k$  gleichlange Teile unterteilen, und wählen dabei  $k \in \mathbb{N}$  so groß, dass die entstehenden  $k^n$  Teilquader die oben beschriebene Eigenschaft haben. Es sei  $I$  die Indexmenge dieser Unterteilung, es ist also  $Q = \bigcup_{i \in I} K_i$  und damit  $\varphi(Q) = \bigcup_{i \in I} \varphi(K_i)$ . Diese Vereinigung ist nicht disjunkt, jedoch sind die Schnittmengen als Bilder von Quaderseiten nach Lemma 67.11 und nach Korollar 74.6 Nullmengen. Wir wenden Lemma 74.7 auf die Teilquader an und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \min(j(x), x \in K_i) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda(\varphi(K_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \max(j(x), x \in K_i). \end{aligned}$$

Dabei ist die Differenz zwischen links und rechts durch

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) 2\epsilon = 2\epsilon \lambda^n(Q)$$

beschränkt, kann also durch  $\epsilon \rightarrow 0$  beliebig klein gemacht werden. Diese Abschätzungen gelten wegen der Monotonie des Integrals auch für das Integral  $\int_Q j(x) d\lambda^n(x)$ , so dass

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q j(x) d\lambda^n(x)$$

gilt. □

**Satz 75.2.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei  $S \subseteq G$  eine messbare Menge. Dann ist  $\varphi(S)$  ebenfalls messbar und es gilt*

$$\lambda^n(\varphi(S)) = \int_S |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

*Beweis.* Ein Diffeomorphismus und seine Umkehrabbildung sind stetig, daher liegt eine Bijektion der messbaren Teilmengen von  $G$  und von  $H$  vor. Wir betrachten die beiden Zuordnungen

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, S \longmapsto \int_S |J(\varphi)| d\lambda^n,$$

also das Maß auf  $G$  mit der Dichte  $|J(\varphi)|$ , und

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, S \longmapsto \lambda^n(\varphi(S)),$$

also das Bildmaß von  $\lambda^n$  unter  $\varphi$ , und müssen zeigen, dass diese beiden Maße gleich sind. Nach Korollar 75.1 gilt die Gleichheit für alle kompakten Quader. Aufgrund von Korollar 74.6 bzw. Aufgabe 70.2 gilt die Gleichheit auch für alle offenen bzw. „nach oben halboffenen“ Quader, also Produkte von nach oben halboffenen Intervallen. Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von diesen zuletzt genannten Quadern bilden einen Mengen-Präring im  $\mathbb{R}^n$ . Diese Menge ist auch ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für das System der Borelmengen. Daher müssen nach Satz 64.7 die beiden Maße generell übereinstimmen. □

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*.

**Satz 75.3.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei*

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine messbare Funktion. Dann ist  $f$  genau dann integrierbar auf  $H$ , wenn die Hintereinanderschaltung  $f \circ \varphi$  auf  $G$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_H f d\lambda^n = \int_G (f \circ \varphi) |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

*Beweis.* Die Zuordnung  $S \mapsto \lambda^n(\varphi(S))$  für messbare Mengen  $S \subseteq G$  ist ein Maß, und zwar handelt es sich um das Bildmaß  $\varphi_*^{-1}\lambda^n$  von  $\lambda^n$  unter der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : H \longrightarrow G.$$

Nach Satz 75.2 besitzt dieses Maß die Dichte  $x \mapsto |(J(\varphi))(x)|$ . Daher gilt nach Aufgabe 75.3 und der allgemeinen Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)| d\lambda^n &= \int_G (f \circ \varphi) d(\varphi_*^{-1}\lambda^n) \\ &= \int_H (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n \\ &= \int_H f d\lambda^n. \end{aligned}$$

□

## 75.2. Beispiele zur Transformationsformel.

**Korollar 75.4.** *Es sei*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

die Polarkoordinatenabbildung und es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen, auf denen  $\varphi$  einen Diffeomorphismus induziert. Es sei

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_H f(x, y) d\lambda^2(x, y) \\ &= \int_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\lambda^2(r, \theta). \end{aligned}$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem  $f$  die Formel

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda^2(x, y) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr. \end{aligned}$$

*Beweis.* Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

direkt aus Satz 75.3. □

**Lemma 75.5.** *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

*Beweis.* Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral  $I$ . Nach Korollar 74.2 ist

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = \cos \theta$  und  $y = \sin \theta$  ist dieses Integral nach Korollar 75.4 und nach einer erneuten Anwendung von Korollar 74.2 gleich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{[0,2\pi]} 1 d\lambda^1(\theta) \right) \left( \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr \\ &= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist auch  $I = 1$ . □



**Beispiel 75.6.** Es soll eine Straße in der Ebene der Breite  $2a$  asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei  $\psi$  zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei  $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$ , was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi : [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung  $\psi$  injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\ = 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)). \end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s] \times [-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| d\lambda^2.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 74.2 gleich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s] \times [-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) d\lambda^2 \\ &= 2as + \left( \int_{-a}^a r dr \right) \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ &= 2as + 0 \cdot \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ &= 2as. \end{aligned}$$

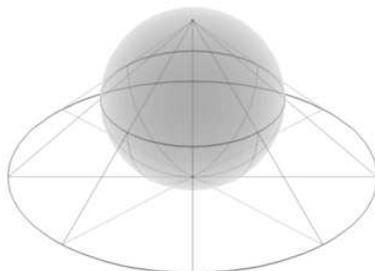
Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

## 76. VORLESUNG

### 76.1. Das Konzept einer Mannigfaltigkeit.

In der zweiten Hälfte dieses Kurses werden wir den Begriff der Mannigfaltigkeit entwickeln. Als Beispiel betrachten wir die Erde (ihre Oberfläche), die in der Wissenschaftsgeschichte lange für eine Scheibe gehalten wurde, und zwar aus gutem Grund. Sie sieht nämlich lokal aus wie eine Ebene. Dies spiegelt sich auch in den Karten wieder, die man sich von ihr macht. Eine Karte ist ein ebenes „Blatt“, dessen Punkte in Bijektion zu einem Ausschnitt der Erdoberfläche steht. Insbesondere bei kleinen Ausschnitten halten wir das für unproblematisch, bei Karten aber, die große Ausschnitte oder gar die gesamte Erde wiedergeben sollen, tauchen schnell Fragen auf, was die Karte richtig

wiedergibt und was nicht, Fragen nach der Längentreue, Flächentreue, Winkeltreue, Fragen über fehlende Punkte oder mehrfach auftretende Punkte, Fortsetzungsfragen, Krümmungsfragen ...



**Beispiel 76.1.** Wir betrachten die Kugeloberfläche

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und nennen den Punkt  $N = (0, 0, 1)$  Nordpol und den Punkt  $S = (0, 0, -1)$  Südpol. Ein Punkt  $P = (x, y, z) \in K$ ,  $P \neq N$ , definiert zusammen mit dem Nordpol eine eindeutige Gerade, die durch

$$(tx, ty, 1 + t(z - 1)) = (0, 0, 1) + t((x, y, z) - (0, 0, 1)), \quad t \in \mathbb{R},$$

parametrisiert ist. Der Vektor  $(x, y, z) - (0, 0, 1)$ , der diese Gerade definiert, ist nicht parallel zur  $x - y$ -Ebene, d.h. dass es genau einen Schnittpunkt dieser Geraden mit dieser Ebene gibt. Dieser ergibt sich zum Parameter

$$t = \frac{1}{1 - z},$$

es handelt sich um den Punkt

$$\left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0\right).$$

Wir fassen diese Konstruktion als eine Abbildung

$$\alpha : K \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right)$$

auf. Es ist anschaulich klar, dass diese Abbildung eine Bijektion ist, was sich auch einfach über die Formeln nachrechnen lässt. Die Umkehrabbildung ergibt sich, indem man einen Punkt  $(u, v, 0)$  der Ebene mit dem Nordpol verbindet und den Durchstoßungspunkt  $\neq N$  mit der Kugeloberfläche berechnet. Dies führt zur Bedingung

$$\begin{aligned} |(0, 0, 1) + a((u, v, 0) - (0, 0, 1))| &= |(au, av, 1 - a)| \\ &= a^2u^2 + a^2v^2 + (1 - a)^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

was auf  $a(au^2 + av^2 - 2 + a) = 0$  führt. Die Lösung  $a = 0$  entspricht dem Nordpol, an der wir nicht interessiert sind, so dass wir auf  $a = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$  geführt werden, also auf die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow K \setminus \{N\}, \quad (u, v) \longmapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}\right).$$

Insbesondere ist also die reelle Ebene homöomorph zur in einem Punkt „ge-  
lochten“ Kugeloberfläche.

Eine entsprechende Überlegung kann man für  $K \setminus \{S\}$  anstellen. Dies führt zur Abbildung

$$\beta : K \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto \left( \frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1} \right)$$

mit der Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow K \setminus \{S\}, (s, t) \longmapsto \left( \frac{2s}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{2t}{s^2 + t^2 + 1}, -1 + \frac{2}{s^2 + t^2 + 1} \right).$$

Der Südpol entspricht bei der ersten Abbildung dem Mittelpunkt der euklidischen Ebene und der Nordpol entspricht bei der zweiten Abbildung dem Mittelpunkt der euklidischen Ebene. Wir nennen beide Abbildungen bzw. ihre Umkehrabbildungen Karten. Beide Karten decken zusammen die gesamte Kugeloberfläche ab. Da es sich um Homöomorphismen handelt, geben sie die wesentlichen topologischen Eigenschaften der Sphäre richtig wieder. Sie sind beide nicht für die Geographie der Erde gut geeignet, da die Karten die gesamte Ebene benötigen und die Längen sehr stark verzerren.

Beide Karten sind gleich gut. Es ist einfach, Punkte (und allgemeiner andere Figuren) auf der einen Karte in die andere Karte umzurechnen. Man muss dabei allerdings beachten, dass die beiden Pole nur in einer Karte vertreten sind. Die Punkte der Menge  $K \setminus \{N, S\}$  finden sich auf beiden Karten, und zwar stehen sie durch beide Karten in Bijektion zu der im Mittelpunkt gelochten Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Die *Übergangsabbildung* (oder der *Kartenwechsel*) wird durch  $\psi = \beta \circ (\alpha^{-1}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}})$  gegeben. Dabei ist

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \beta \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}}{2 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}}, \frac{\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}}{2 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{u}{u^2 + v^2 + 1}}{\frac{(u^2 + v^2 + 1) - 1}{u^2 + v^2 + 1}}, \frac{\frac{v}{u^2 + v^2 + 1}}{\frac{(u^2 + v^2 + 1) - 1}{u^2 + v^2 + 1}} \right) \\ &= \left( \frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Übergangsabbildung induziert nicht nur einen Homöomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,<sup>6</sup> was unmittelbar daraus folgt, dass die Kartenabbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  Homöomorphismen sind, sondern sogar einen Diffeomorphismus. Dies ist direkt aus der Funktionsvorschrift ablesbar; es macht aber keinen Sinn zu sagen, dass die Kartenabbildungen Diffeomorphismen sind, da ja die Kugeloberfläche keine offene Teilmenge im  $\mathbb{R}^3$  ist. Was bisher fehlt ist

<sup>6</sup>Es empfiehlt sich hier nicht, „mit sich“ zu sagen, da man sich die beiden Kartenebenen als unabhängig voneinander vorstellen sollte. Die Beziehung zwischen ihnen entsteht allein dadurch, dass sie beide die gleiche Kugeloberfläche beschreiben.

eine „differenzierbare Struktur“ auf dieser Oberfläche, um von diffeomorph sprechen zu können.

Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein geometrisches Gebilde, das „lokal“ so aussieht wie der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$ . Dabei setzen wir dieses geometrische Gebilde als einen topologischen Raum an, und lokal wird dadurch präzisiert, dass es eine Überdeckung aus offenen Mengen gibt, die homöomorph zu offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind. Obwohl wir im Folgenden mit topologischen Räumen arbeiten sei erwähnt, dass sich der Vorstellungsgehalt des Folgenden nicht verringert, wenn man bei einem topologischen Raum einfach an einen metrischen Raum denkt.

## 76.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

**Definition 76.2.** Ein topologischer Hausdorff-Raum  $M$  heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit* der *Dimension*  $n$ , wenn es eine offene Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  gibt derart, dass jedes  $U_i$  homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

Zu jedem Punkt  $P \in M$  gebe es also eine offene Umgebung  $P \in U \subseteq M$ , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist. Sei

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

eine Homöomorphie und sei  $Q = \varphi(P)$ . Dann entspricht einer offenen Ballumgebung  $Q \in U(Q, \epsilon) \subseteq V$  eine offene Umgebung  $U' = \varphi^{-1}(U(Q, \epsilon))$  mit  $P \in U' \subseteq U$ , die nach Konstruktion homöomorph zu einem offenen Ball ist. Man kann daher eine topologische Mannigfaltigkeit auch als einen topologischen Hausdorff-Raum charakterisieren, der *lokal euklidisch* ist.

**Definition 76.3.** Es sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann nennt man jede Homöomorphie

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

wobei  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sind, eine (topologische) *Karte* für  $M$ .

Dabei nennt man die offene Menge  $U \subseteq M$  manchmal das *Kartengebiet* und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  das *Kartenbild*. Zu einer Karte

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

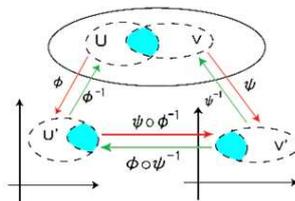
und einer offenen Teilmenge  $U' \subseteq U$  ist auch die induzierte Abbildung

$$\varphi|_{U'} : U' \longrightarrow \varphi(U')$$

wieder eine Karte. Manchmal nennt man auch die Umkehrabbildung eine Karte. Statt Karte spricht man auch von einem *lokalen Koordinatensystem*. Durch die Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  werden ja die Koordinaten auf  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  auf  $U$  übertragen. Die  $j$ -te Koordinate  $x_j : V \rightarrow \mathbb{R}$  induziert die (lokale Koordinaten)-Funktion

$$x_j \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

(die oft einfach wieder mit  $x_j$  bezeichnet wird), und ein Punkt  $Q = (x_1, \dots, x_n) \in V$  entspricht einem Punkt  $P = \varphi^{-1}(Q)$ .



**Definition 76.4.** Es sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit, es seien  $U_1, U_2 \subseteq M$  offene Teilmengen und  $\alpha_1 : U_1 \rightarrow V_1$  und  $\alpha_2 : U_2 \rightarrow V_2$  seien Karten (mit  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  offen). Dann heißt die Abbildung

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow V_2 \cap \alpha_2(U_1 \cap U_2)$$

die *Übergangsabbildung* zu diesen Karten.

Der Durchschnitt  $U_1 \cap U_2$  ist die offene Teilmenge, auf der beide Karten definiert sind und worauf man die beiden Karten vergleichen kann. Genauer müsste man in der Definition von der Einschränkung von  $\alpha_1^{-1}$  auf die offene Teilmenge  $\alpha_1(U_1 \cap U_2) \subseteq V_1$  sprechen.

**Definition 76.5.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \overline{\mathbb{N}}_+$ . Ein topologischer Hausdorff-Raum  $M$  zusammen mit einer offenen Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  und Karten

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$$

mit  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  derart, dass die Übergangsabbildungen

$$\alpha_j \circ (\alpha_i)^{-1} : V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$

$C^k$ -Diffeomorphismen sind, heißt  $C^k$ -Mannigfaltigkeit oder *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (vom Grad  $k$ ). Die Menge der Karten  $(U_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$ , nennt man auch den  $C^k$ -Atlas der Mannigfaltigkeit.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist insbesondere eine topologische Mannigfaltigkeit. Nach unserer Definition ist der Atlas ein integraler Bestandteil des Mannigfaltigkeitsbegriffs. Wichtiger als der Atlas ist aber die durch den Atlas definierte *differenzierbare Struktur* auf der Mannigfaltigkeit. Dies wird deutlicher, wenn wir den Begriff der differenzierbaren Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten zur Verfügung haben und von diffeomorphen Mannigfaltigkeiten sprechen können.

**Definition 76.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge  $U \subseteq M$ , die mit den eingeschränkten Karten versehen ist, heißt *offene Untermannigfaltigkeit*.

**Beispiel 76.7.** Jede offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, wenn man die Identität  $\text{Id} : V \rightarrow V$  als Karte nimmt. Die einzige Übergangsabbildung ist dann ebenfalls diese Identität, die ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus

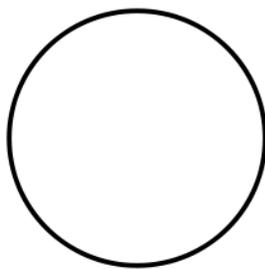
ist. Dies ist dann eine Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der aus einer einzigen Karte besteht. Man kann aber genauso gut den Atlas nehmen, der aus sämtlichen offenen Teilmengen  $U \subseteq V$  und den zugehörigen identischen Karten  $\varphi_U$  besteht. Die Übergangsabbildungen sind dann die Identitäten auf  $U_1 \cap U_2$ .

Wir haben schon früher im Kontext des Zwischenwertsatzes von zusammenhängenden metrischen Räumen gesprochen. Die gleiche Definition verwenden wir auch für topologische Räume.

**Definition 76.8.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn es in  $X$  genau zwei Teilmengen gibt (nämlich  $\emptyset$  und der Gesamtraum  $X$ ), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Häufig interessiert man sich nur für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, vor allem deshalb, da man im nicht zusammenhängenden Fall die einzelnen „Zusammenhangskomponenten“ getrennt voneinander untersuchen kann. Wir besprechen kurz niedrigdimensionale Mannigfaltigkeiten.

**Beispiel 76.9.** Bei einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es für jeden Punkt  $P \in M$  eine offene Umgebung  $P \in U$ , die homöomorph zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  ist. D.h. dass die einpunktige Menge  $\{P\}$  offen sein muss, und daher muss  $M$  die diskrete Topologie tragen, d.h. jede Teilmenge ist offen. Daher ist die einzige zusammenhängende nulldimensionale Mannigfaltigkeit die einpunktige Menge.



Eine Kreislinie ist eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit

**Beispiel 76.10.** An eindimensionalen Mannigfaltigkeiten gibt es zunächst die offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^1$ . Diese sind Vereinigungen von offenen Intervallen, und sie sind genau dann zusammenhängend, wenn sie ein offenes Intervall sind. Jedes offene, beschränkte oder unbeschränkte Intervall ist homöomorph und auch diffeomorph zum offenen Einheitsintervall  $]0, 1[$  und zu den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  selbst. Die abgeschlossenen Intervalle  $[a, b]$  mit  $a < b$  sind keine Mannigfaltigkeiten, da es für die Randpunkte (die Intervallgrenzen) keine offene Umgebung gibt, die homöomorph zu einem offenen Intervall ist (sie sind aber sogenannte *Mannigfaltigkeiten mit Rand*).

Darüber hinaus gibt es noch den *Kreis* (die *Sphäre*)  $S^1$  als weitere zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Für jeden Punkt  $P \in S^1$  ist  $S^1 \setminus \{P\}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  (durch stereographische Projektion). Der Kreis ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}$ , da der Kreis kompakt ist, die reellen Zahlen aber nicht. Neben  $S^1$  und  $\mathbb{R}$  gibt es keine weiteren eindimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie (was hier ohne Beweis erwähnt sei).

Ab der Dimension zwei ist es ohne starke zusätzliche Voraussetzungen nicht möglich, sich eine Übersicht über alle Mannigfaltigkeiten zu verschaffen.

## 77. VORLESUNG

### 77.1. Der Satz über implizite Abbildungen und Mannigfaltigkeiten.

Die Einheitssphäre, die wir in der letzten Vorlesung als ein motivierendes Beispiel einer Mannigfaltigkeit besprochen haben, ist die Faser zur differenzierbaren Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

über 1. Diese Abbildung ist mit Ausnahme des Nullpunkts regulär. Der Satz über implizite Abbildung macht in dieser Situation weitreichende Aussagen über die lokale Gestalt der Faser, nämlich, dass es lokal Homöomorphismen zwischen der Faser in einem regulären Punkt und einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^k$  gibt, wobei  $k$  die Differenz zwischen der Dimension des Ausgangsraumes und der Dimension des Zielraumes ist. Wir werden gleich sehen, dass solche Fasern nicht nur topologische Mannigfaltigkeiten, sondern auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Wir formulieren den Satz über implizite Abbildungen in einer Version, aus der sich ablesen lässt, dass die regulären Fasern differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.

**Satz 77.1.** *Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $Z = \varphi^{-1}(0)$  die Faser über  $0 \in \mathbb{R}^\ell$ , und  $\varphi$  sei in jedem Punkt der Faser regulär. Dann gibt es zu jedem Punkt  $P \in Z$  eine offene Umgebung  $P \in W \subseteq G$ , offene Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-\ell}$  und  $V' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ , und einen  $C^1$ -Diffeomorphismus*

$$\theta : W \longrightarrow V \times V'$$

*mit  $\varphi|_W = p_2 \circ \theta$ , der eine Bijektion zwischen  $Z \cap W$  und  $V \times \{0\}$  induziert, und so, dass das totale Differential  $(D\theta)_Q$  für jedes  $Q \in W$  eine Bijektion zwischen  $\ker(D\varphi)_Q$  und  $\mathbb{R}^{n-\ell}$  stiftet.*

*Beweis.* Diese Aussage wurde im Beweis des Satzes über implizite Abbildungen mitbewiesen. Der Zusatz ergibt sich aus

$$\text{kern}(D\varphi)_Q \cong \text{kern}(Dp_2)_{\theta(Q)} = \mathbb{R}^{n-\ell}.$$

□

Für die Faser selbst ergibt sich daraus die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Der Satz über implizite Abbildungen beschert uns also mit einer riesigen Klasse von Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich dabei um sogenannte *abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten*, die wir bald, wenn wir Tangentialräume zur Verfügung haben, systematischer behandeln werden.

**Satz 77.2.** *Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $Z = \varphi^{-1}(Q)$  die Faser über einem Punkt  $Q \in \mathbb{R}^\ell$ . Das totale Differential  $(D\varphi)_P$  sei surjektiv für jeden Punkt  $P \in Z$ . Dann ist  $Z$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - \ell$ .*

*Beweis.* Wir setzen  $Q = 0$ . Aufgrund von Satz 77.1 gibt es zu jedem Punkt  $P \in Z$  eine offene Umgebung  $P \in W \subseteq G$  und einen  $C^1$ -Diffeomorphismus

$$\theta : W \longrightarrow V \times V'$$

mit offenen Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-\ell}$  und  $V' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ , so dass  $\theta$  eine Bijektion zwischen  $Z \cap W$  und  $V \times \{0\} \cong V$  induziert. Die Einschränkungen dieser Diffeomorphismen auf  $Z \cap W$  bzw.  $V$  nehmen wir als Karten für  $Z$ . Zum Nachweis, dass dies eine differenzierbare Struktur auf  $Z$  definiert, seien offene Umgebungen  $W_1$  und  $W_2$  von  $P \in Z$  gegeben zusammen mit Diffeomorphismen

$$\theta_1 : W_1 \longrightarrow V_1 \times V'_1$$

und

$$\theta_2 : W_2 \longrightarrow V_2 \times V'_2.$$

Durch Übergang zu  $W = W_1 \cap W_2$  können wir annehmen, dass beide offenen Mengen gleich sind. Die Übergangsabbildung  $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}$  ist ein  $C^1$ -Diffeomorphismus zwischen  $V_1 \times V'_1$  und  $V_2 \times V'_2$ , der  $V_1 \times \{0\}$  in  $V_2 \times \{0\}$  überführt. Daher ist nach Aufgabe 77.6 auch die auf diese Teilmengen eingeschränkte Übergangsabbildung ein  $C^1$ -Diffeomorphismus (zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^{n-\ell}$ ). □

## 77.2. Differenzierbare Abbildungen.

**Definition 77.3.** Es seien  $L$  und  $M$  zwei  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten mit Atlanten  $(U_i, U'_i, \alpha_i, i \in I)$  und  $(V_j, V'_j, \beta_j, j \in J)$ . Es sei  $1 \leq \ell \leq k$ . Eine stetige Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

heißt eine  $C^\ell$ -differenzierbare Abbildung, wenn für alle  $i \in I$  und alle  $j \in J$  die Abbildungen

$$\beta_j \circ \varphi \circ (\alpha_i)^{-1} : \alpha_i(\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i) \longrightarrow V_j'$$

$C^\ell$ -differenzierbar sind.

Da die  $\alpha_i(\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i)$  offen sind, ist durch diese Definition der Differenzierbarkeitsbegriff auf Mannigfaltigkeiten auf den Differenzierbarkeitsbegriff von Abbildungen zwischen offenen Mengen in reellen Vektorräumen zurückgeführt. Da man eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit als eine  $C^\ell$ -Mannigfaltigkeit für  $\ell \leq k$  auffassen kann, genügt es im Wesentlichen, von  $C^k$ -Abbildungen zwischen  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten zu sprechen. Wichtig sind insbesondere die Fälle  $k = 1, 2, \infty$ . Man beachte, dass wir bei  $k = 1$  von einer differenzierbaren Abbildung sprechen, ohne dass es (bisher) eine „Ableitung“ gibt.

**Proposition 77.4.** *Es seien  $L, M$  und  $N$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Identität*

$$\text{Id} : M \longrightarrow M$$

*ist eine  $C^k$ -Abbildung.*

- (2) *Jede konstante Abbildung*

$$\varphi : M \longrightarrow L$$

*ist eine  $C^k$ -Abbildung.*

- (3) *Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq M$  ist die offene Einbettung  $U \rightarrow M$  eine  $C^k$ -Abbildung.*

- (4) *Es seien*

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

*und*

$$\psi : M \longrightarrow N$$

*$C^k$ -Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung*

$$\psi \circ \varphi : L \longrightarrow N$$

*eine  $C^k$ -Abbildung.*

*Beweis.* (1). Die zu überprüfenden Abbildungen sind genau die Kartenwechsel  $\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}$ , die nach Definition einer  $C^k$ -differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $C^k$ -Diffeomorphismen sind. (2). Die zu überprüfenden Abbildungen sind bzgl. jeder Karte konstant, also beliebig oft differenzierbar. (3). Die zu überprüfenden Abbildungen sind bzgl. jeder Karte eine offene Einbettung von zwei offenen Mengen in einem euklidischen Raum. (4). Es seien

$$\gamma_\ell : W_\ell \longrightarrow W'_\ell$$

die Karten für  $N$ . Dann sind für alle möglichen Indexkombinationen die (auf gewissen offenen Teilmengen eingeschränkten) Hintereinanderschaltungen

$$\begin{aligned} & \gamma_\ell \circ (\psi \circ \varphi) \circ \alpha_i^{-1} \\ = & \gamma_\ell \circ \psi \circ \beta_j^{-1} \circ \beta_j \circ \varphi \circ \alpha_i^{-1} \\ = & (\gamma_\ell \circ \psi \circ \beta_j^{-1}) \circ (\beta_j \circ \varphi \circ \alpha_i^{-1}) \end{aligned}$$

nach der Kettenregel differenzierbar.  $\square$

**Definition 77.5.** Es seien  $L$  und  $M$  zwei  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten. Ein Homöomorphismus

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

heißt ein  $C^k$ -Diffeomorphismus, wenn sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$   $C^k$ -Abbildungen sind.

**Definition 77.6.** Zwei  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten  $L$  und  $M$  heißen  $C^k$ -diffeomorph, wenn es zwischen ihnen einen  $C^k$ -Diffeomorphismus gibt.

**Bemerkung 77.7.** Zu einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem  $C^k$ -Atlas  $(U_i, U'_i, \alpha_i, i \in I)$  gibt es einen *maximalen Atlas*, der mit der durch den Atlas gegebenen differenzierbaren Struktur verträglich ist. Er besteht aus der Menge aller Homöomorphismen

$$\beta : U \longrightarrow V$$

mit offenen Mengen  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft, dass diese Abbildungen  $C^k$ -Abbildungen (bzgl. der durch den Atlas gegebenen Struktur) sind. Dieser maximale Atlas enthält natürlich den Ausgangsatlas, ist aber im Allgemeinen bei weitem größer. Beispielsweise enthält er zu jeder Karte  $\beta : U \rightarrow V$  und jeder offenen Teilmenge  $U' \subseteq U$  auch die eingeschränkte Kartenabbildung. Wichtig ist, dass die identische Abbildung

$$\text{Id} : (M, A) \longrightarrow (M, B),$$

wobei  $A$  den Ausgangsatlas und  $B$  den maximalen Atlas bezeichnet, ein  $C^k$ -Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist, wie unmittelbar aus der Definition folgt. Wichtiger als der Atlas ist die durch ihn vertretene differenzierbare Struktur auf der Mannigfaltigkeit, die festlegt, welche Abbildungen differenzierbar und welche Diffeomorphismen sind.

### 77.3. Differenzierbare Funktionen.

Eine  $C^k$ -differenzierbare Abbildung

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in die reellen Zahlen nennt man auch eine  $C^k$ -differenzierbare Funktion. Nach Definition bedeutet das einfach, dass für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \alpha^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $C^k$ -Funktion ist. Die Menge aller  $C^k$ -Funktionen auf  $M$  werden mit  $C^k(M, \mathbb{R})$  bezeichnet.

**Lemma 77.8.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und*

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*differenzierbare Funktionen auf  $M$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$f \times g : M \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

*ist differenzierbar.*

(2)  *$f + g$  ist differenzierbar.*

(3)  *$f \cdot g$  ist differenzierbar.*

(4) *Wenn  $f$  keine Nullstelle besitzt, so ist auch  $f^{-1}$  differenzierbar.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 77.1. □

Insbesondere bilden die differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit einen kommutativen Ring.

Wenn

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte ist mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so liefert jede Projektion  $x_i$  eine differenzierbare Funktion

$$x_i \circ \alpha : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

die meistens wieder mit  $x_i$  bezeichnet wird. Man sagt dann, dass die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  *differenzierbare Koordinaten* für  $U \subseteq M$  bilden. Für eine stetig differenzierbare Funktion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist nach Definition die Funktion

$$f \circ \alpha^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar, d.h. für jedes  $i$  existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(f \circ \alpha^{-1})}{\partial x_i},$$

die wiederum (stetige) Funktionen auf  $V$  sind. Daher sind

$$\frac{\partial(f \circ \alpha^{-1})}{\partial x_i} \circ \alpha$$

Funktionen auf  $U$ . Diese werden im Allgemeinen einfach wieder mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  bezeichnet.

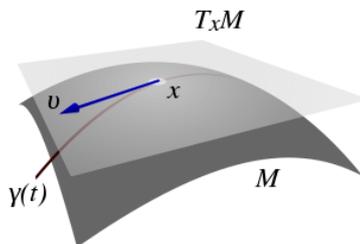
## 78. VORLESUNG

## 78.1. Der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Für die Faser einer differenzierbaren Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, in einem regulären Punkt  $P \in G$  haben wir den Tangentialraum an die Faser durch  $P$  als Kern des totalen Differentials definiert. Dadurch war der Tangentialraum ein  $(n - m)$ -dimensionaler Untervektorraum des umgebenden Vektorraums  $\mathbb{R}^n$ . Für unseren abstrakten Mannigfaltigkeitsbegriff gibt es einen solchen umgebenden Vektorraum nicht, in dem sich alles abspielt. Dennoch können wir auch für eine Mannigfaltigkeit in jedem Punkt einen Tangentialraum erklären. Dieser wird ein Vektorraum sein (dessen Dimension gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit ist), und zu einer differenzierbaren Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten wird das totale Differential in jedem Punkt eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen sein. Wenn man für einen Punkt  $P \in M$  eine offene Umgebung  $P \in U \subseteq M$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

heranzieht mit  $V \subseteq \mathbb{R}^k$ , so liegt es nahe, diesen  $\mathbb{R}^k$  als Tangentialraum zu betrachten. In der Tat wird es eine solche Isomorphie geben, doch als Definition ist dieser Ansatz wegen der Abhängigkeit von der gewählten Karte unbrauchbar. Stattdessen arbeiten wir mit Äquivalenzklassen von differenzierbaren Kurven.



**Definition 78.1.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Es seien

$$\gamma_1 : I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 : I_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Intervallen  $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$  definierte differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$ . Dann heißen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  *tangential äquivalent* in  $P$ , wenn es eine offene Umgebung  $P \in U$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  gibt derart, dass

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) = (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

Wir brauchen einige einfache Lemmata, um nachzuweisen, dass es sich hierbei um einen sinnvollen Begriff handelt.

**Lemma 78.2.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Es seien*

$$\gamma_1 : I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 : I_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Intervallen  $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$  definierte differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$ . Dann sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  genau dann tangential äquivalent in  $P$ , wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $P \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  die Gleichheit

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) = (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

*Beweis.* Für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = P$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit  $P \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ) ändert sich der Ausdruck

$$(\alpha \circ (\gamma|_{\gamma^{-1}(U)}))'(0)$$

nicht, wenn man zu einem kleineren offenen Intervall  $0 \in I' \subseteq I$  und einer kleineren offenen Menge  $P \in U' \subseteq U$  (mit der induzierten Karte) übergeht. Wir können also davon ausgehen, dass  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  auf dem gleichen Intervall definiert sind und ihre Bilder in  $U$  liegen, und dass es für dieses  $U$  zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

gibt. Dann folgt aus

$$(\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0) = (\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)$$

nach Satz 44.7 unter Verwendung der Differenzierbarkeit der Übergangsabbildung  $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  sofort

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \circ \gamma_1)'(0) &= ((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1))'(0) \\ &= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0)) \\ &= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)) \\ &= (\alpha_2 \circ \gamma_2)'(0). \end{aligned}$$

□

**Lemma 78.3.** *Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Dann ist die tangentiale Äquivalenz von differenzierbaren Kurven durch  $P$  eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Die Reflexivität und die Symmetrie der Relation sind unmittelbar klar. Zum Nachweis der Transitivität seien drei differenzierbare Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \longrightarrow M$$

gegeben, wobei wir sofort annehmen dürfen, dass sie auf dem gleichen offenen Intervall  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  definiert sind. Es seien  $P \in U_1, U_2$  offene Mengen, mit denen man die tangentiale Gleichheit von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bzw. von  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  nachweisen kann. Dann kann man nach Lemma 78.2 mit  $U = U_1 \cap U_2$  die tangentiale Gleichheit von  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  nachweisen. □

Aufgrund dieses Lemmas ist die folgende Definition sinnvoll.

**Definition 78.4.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Unter einem *Tangentialvektor* an  $P$  versteht man eine Äquivalenzklasse von tangential äquivalenten differenzierbaren Kurven durch  $P$ . Die Menge dieser Tangentialvektoren wird mit

$$T_P M$$

bezeichnet.

**Lemma 78.5.** *Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $P \in M$  ein Punkt,  $P \in U \subseteq M$  offen und*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

*eine Karte. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$T_P M \longrightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \longmapsto (\alpha \circ (\gamma|_{\gamma^{-1}(U)})'(0),$$

*ist eine wohldefinierte Bijektion.*

(2) *Die durch diese Abbildung auf  $T_P M$  definierte Vektorraumstruktur ist unabhängig von der gewählten Karte.*

*Beweis.* (1). Die Wohldefiniertheit der Abbildung ist klar wegen Lemma 78.2. Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition. Zur Surjektivität sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten die affin-lineare Kurve

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \theta(t) = \alpha(P) + tv,$$

dessen Ableitung in 0 gerade  $v$  ist. Wir schränken diese Kurve auf ein Intervall  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  ein derart, dass  $\theta(I) \subseteq V$  ist und betrachten

$$\gamma = \alpha^{-1} \circ \theta : I \longrightarrow M.$$

Für diese Kurve gilt

$$\gamma(0) = (\alpha^{-1} \circ \theta)(0) = \alpha^{-1}(\theta(0)) = \alpha^{-1}(\alpha(P)) = P$$

und

$$(\alpha \circ \gamma)'(0) = (\alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \theta))'(0) = \theta'(0) = v.$$

(2). Durch Übergang zu kleineren offenen Mengen können wir annehmen, dass zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

vorliegen. Die Übergangsabbildung

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

ist ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und für ihr totales Differential in  $\alpha_1(P)$  gilt nach der Kettenregel die Beziehung

$$(D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma)'(0)) = (\alpha_2 \circ \gamma)'(0).$$

Das bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^n, \end{array}$$

wobei vertikal das totale Differential zu  $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  steht, kommutiert. Da das totale Differential eine lineare Abbildung ist, die in der gegebenen Situation bijektiv ist, macht es keinen Unterschied, ob man die Addition und die Skalarmultiplikation auf  $T_P M$  unter Bezug auf die obere oder die untere horizontale Abbildung definiert.  $\square$

**Definition 78.6.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Unter dem *Tangententialraum* an  $P$ , geschrieben  $T_P M$ , versteht man die Menge der Tangentialvektoren an  $P$  versehen mit der durch eine beliebige Karte gegebenen reellen Vektorraumstruktur.

**Definition 78.7.** Es sei  $M$  eine  $(C^1)$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Den Dualraum des Tangentialraumes  $T_P M$  an  $P$  nennt man den *Kotangententialraum* an  $P$ . Er wird mit

$$T_P^* M$$

bezeichnet.

**Lemma 78.8.** *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$  und es seien*

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit einem offenen Intervall  $0 \in I$  und  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ . Es seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  im Punkt  $P$  tangential äquivalent. Dann sind auch die Verknüpfungen  $\varphi \circ \gamma_1$  und  $\varphi \circ \gamma_2$  tangential äquivalent in  $Q$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 78.1. □

Aufgrund dieses Lemmas ist der folgende Begriff wohldefiniert.

**Definition 78.9.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$ . Dann nennt man die Abbildung

$$T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N, [\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma],$$

die zugehörige *Tangentialabbildung im Punkt  $P$* . Sie wird mit  $T_P(\varphi)$  bezeichnet.

**Lemma 78.10.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$ ,  $Q = \varphi(P)$  und es sei

$$T_P(\varphi) : T_P M \longrightarrow T_Q N$$

die zugehörige *Tangentialabbildung*. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen sind und die Tangentialräume mit den umgebenden euklidischen Räumen identifiziert werden, so ist die Tangentialabbildung gleich dem totalen Differential  $(D\varphi)_P$ .
- (2)  $T_P(\varphi)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.
- (3) Wenn  $L$  eine weitere Mannigfaltigkeit,  $R \in L$  und

$$\psi : L \longrightarrow M$$

eine weitere differenzierbare Abbildung mit  $\psi(R) = P$  ist, so gilt

$$T_R(\varphi \circ \psi) = T_P(\varphi) \circ T_R(\psi).$$

- (4) Wenn  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, dann ist  $T_P(\varphi)$  ein Isomorphismus.
- (5) Für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $0 \in I$  und  $\gamma(0) = P$  gilt im Tangentialraum  $T_P M$  die Gleichheit

$$[\gamma] = (T_0(\gamma))(1).$$

*Beweis.* (1). Jeder Tangentialvektor wird repräsentiert durch einen affinen Weg  $t \mapsto \gamma(t) = P + tv$  mit einem Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$ . Für den zusammengesetzten Weg  $\varphi \circ \gamma$  gilt nach der Kettenregel

$$(T_P\varphi)(v) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = (D\varphi)_P((D\gamma)_0(1)) = (D\varphi)_P(v).$$

(2). Die Tangentialabbildung in  $P$  lässt sich auf jeder offenen Umgebung von  $P$  bestimmen. Daher kann man annehmen, dass  $M$  und  $N$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  sind; die Aussage folgt dann aus (1) und der Linearität des totalen Differentials. (3). Durch Übergang zu Karten folgt dies aus (1) und der Kettenregel. (4) folgt aus (3) angewendet auf die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$ . (5). Das Element  $1 \in \mathbb{R}$  ist als Tangentenvektor an einem Punkt  $a \in I$  als der Weg  $s \mapsto a + s$  zu interpretieren. Bei  $a = 0$  ist dies der identische Weg. Daher ist

$$(T_0(\gamma))(1) = (T_0(\gamma))(\text{Id}) = [\gamma \circ \text{Id}] = [\gamma].$$

□

**Definition 78.11.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$ . Dann nennt man die zur Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi) : T_P M \longrightarrow T_Q N$$

duale Abbildung

$$T_Q^* N \longrightarrow T_P^* M, h \longmapsto h \circ T_P(\varphi),$$

die *Kotangentialabbildung* im Punkt  $P$ . Sie wird mit  $T_P^*(\varphi)$  bezeichnet.

Ausgeschrieben handelt es sich dabei um die Abbildung

$$T_Q^* N \longrightarrow T_P^* M, h \longmapsto ([\gamma] \mapsto h([\varphi \circ \gamma])),$$

**Definition 78.12.** Es seien  $L$  und  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  im Punkt  $Q \in L$  *regulär* (und  $Q$  ein *regulärer Punkt* für  $\varphi$ ), wenn die Tangentialabbildung

$$T_Q(\varphi) : T_Q L \longrightarrow T_{\varphi(Q)} M$$

im Punkt  $Q$  maximalen Rang besitzt.

Diese Definition verallgemeinert die entsprechende Definition von euklidischen Teilmengen auf Mannigfaltigkeiten. Sie bedeutet einfach, dass bei  $\dim(L) \geq \dim(M)$  die Tangentialabbildung in  $Q$  surjektiv sein muss und bei  $\dim(L) \leq \dim(M)$  injektiv sein muss.

## 79. VORLESUNG

## 79.1. Abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten.

**Definition 79.1.** Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann heißt  $M$  eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit* der Dimension  $m$  von  $N$ , wenn es zu jedem Punkt  $P \in M$  eine Karte <sup>7</sup>

$$\theta : W \longrightarrow W'$$

gibt mit  $P \in W \subseteq N$  offen,  $W' \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und mit

$$M \cap W = \theta^{-1}((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W').$$

Dies ist genau die Eigenschaft, die die Faser einer differenzierbaren Abbildung zwischen euklidischen Räumen in einem regulären Punkt aufgrund des Satzes über implizite Abbildungen besitzt. D.h. solche Fasern sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von  $N = \mathbb{R}^n$ .

**Satz 79.2.** *Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$  von  $N$ . Dann ist  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit derart, dass die Inklusion  $M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung ist.*

*Beweis.* Die differenzierbare Struktur auf  $M$  ist durch die eingeschränkten Karten

$$\theta|_M : M \cap W \longrightarrow (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$$

gegeben. Dass sich die Diffeomorphismeigenschaft der Kartenwechsel auf die Einschränkungen überträgt ergibt sich wie im Beweis zu Satz 77.2. Dass eine differenzierbare Abbildung vorliegt ergibt sich daraus, dass zu einem offenen Kartengebiet  $W \subseteq N$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \cap W & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

gehört, wobei die vertikalen Pfeile offene und die horizontalen Pfeile abgeschlossene Einbettungen repräsentieren. Der obere Pfeil korrespondiert über die Kartenwechsel zu

$$(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W' \longrightarrow W',$$

also zur abgeschlossenen Einbettung eines Koordinatenunterraums, die natürlich differenzierbar ist.  $\square$

<sup>7</sup>Hier ist mit Karte jede Karte gemeint, die mit dem vorgegebenen Atlas verträglich ist; sie muss nicht selbst zum Atlas gehören.

**Satz 79.3.** *Es sei  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und es sei  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Dann ist für jeden Punkt  $P \in M$  die Tangentialabbildung*

$$T_P M \longrightarrow T_P N$$

*injektiv. D.h. der Tangentialraum  $T_P M$  ist ein Untervektorraum der Dimension  $m$  von  $T_P N$ .*

*Beweis.* Sei  $P \in M$ . Für ein offenes Kartengebiet

$$\theta : W \longrightarrow W'$$

mit  $P \in W \subseteq N$  erhält man einen Vektorraumisomorphismus  $T_P N \cong T_{\theta(P)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Ein Tangentenvektor aus  $T_P M$  wird durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M \cap W$$

mit  $\gamma(0) = P$  repräsentiert. Da  $\theta$  eine Korrespondenz zwischen  $M \cap W$  und  $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$  induziert, ist  $\theta \circ \gamma$  eine differenzierbare Kurve, die ganz in  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  verläuft. Daher ergibt sich aus der Isomorphie  $T_P N \cong \mathbb{R}^n$  für die Tangentialräume das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \longrightarrow & T_P N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array} ,$$

so dass insbesondere  $T_P M$  ein Unterraum von  $T_P N$  ist. □

Durch die letzte Aussage ergibt sich auch, dass der in einem regulären Punkt  $P$  der Faser  $M$  einer differenzierbaren Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, als Kern des totalen Differentials (als Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n = T_P \mathbb{R}^n$ ) definierte Tangentialraum mit dem Tangentialraum an die Faser als einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit übereinstimmt.

## 79.2. Das Tangentialbündel.

Zu jedem Punkt  $P \in M$  einer Mannigfaltigkeit gehört der Tangentialraum  $T_P M$ . Der Tangentialraum ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, wobei  $n$  die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Seine Elemente sind die Tangentenvektoren, das sind „infinitesimale Richtungen“ an diesem Punkt. Solche Tangenten-Richtungen an zwei verschiedenen Punkten haben zunächst einmal nichts miteinander zu tun, da ihre präzise Definition jeweils nur von beliebig kleinen offenen Umgebungen der Punkte abhängt, und da diese aufgrund der Hausdorff-Eigenschaft disjunkt gewählt werden können.

Dem steht radikal die Vorstellung gegenüber, die sich mit einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  verbindet. Dort kann man für jeden Punkt  $Q \in \mathbb{R}^n$  den Tangentialraum  $T_Q V$  mit dem umgebenden Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise identifizieren, indem man dem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  den Tangentenvektor zuordnet, der durch die lineare Kurve  $t \mapsto Q + tv$  definiert wird. Da diese Identifizierung

für jeden Punkt gilt, besteht zwischen den Tangentialräumen zu  $Q \in V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine direkte Parallelität.

Da eine Mannigfaltigkeit durch offene Mengen überdeckt wird, die diffeomorph zu offenen Mengen in einem euklidischen Raum sind, liegt die Vermutung nahe, dass die verschiedenen Tangentialräume doch nicht völlig isoliert dastehen. Das Konzept des *Tangentialbündels* vereinigt alle Tangentialräume und ermöglicht es, die lokale Verbundenheit der Tangentialräume wiederzuspiegeln.

**Definition 79.4.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

$$TM = \bigsqcup_{P \in M} T_P M,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi : TM \longrightarrow M, (P, v) \longmapsto P,$$

das *Tangentialbündel* von  $M$ .

**Definition 79.5.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

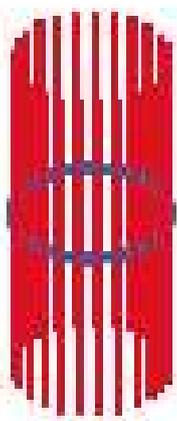
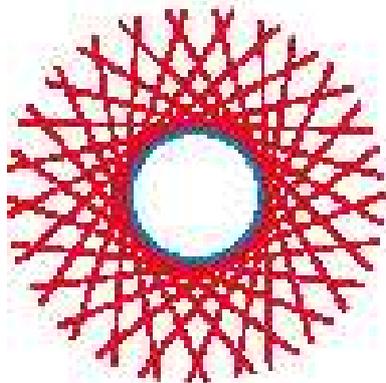
eine differenzierbare Abbildung. Es seien  $TM$  und  $TN$  die zugehörigen Tangentialbündel. Dann versteht man unter der *Tangentialabbildung*

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

die disjunkte Vereinigung der Tangentialabbildungen in den einzelnen Punkten, also

$$T(\varphi) = \bigsqcup_{P \in M} T_P(\varphi).$$

Ein Punkt  $u \in TM$  in einem Tangentialbündel besitzt also stets einen *Basispunkt*  $P \in M$  und ist ein Element im Tangentialraum  $T_P M$ . Das Tangentialbündel bringt zunächst einmal nur die verschiedenen Tangentialräume disjunkt zusammen, ohne dass verschiedene Tangentialräume miteinander identifiziert würden; allerdings entsteht durch die Topologie, die wir auf dem Tangentialbündel gleich einführen werden, eine zusätzliche „Nachbarschaftsstruktur“ zwischen den Tangentialräumen.



Zwei Visualisierungen des Tangentialbündels einer Kreislinie. Oben wird zu jedem Punkt  $P$  des Kreises der Tangentialraum an den Kreis „tangential“ angelegt und als eindimensionaler affiner Unterraum im umgebenden  $\mathbb{R}^2$  realisiert. Diese Einbettung führt zu Überschneidungen, die es im Tangentialbündel aber nicht gibt, da der Basispunkt  $P$  mitbedacht werden muss. Unten werden zu jedem Punkt des Kreises die Tangentialräume parallel angeordnet und es ergibt sich ein Zylinder.

**Beispiel 79.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann induziert die Karte eine natürliche Bijektion

$$T(\alpha^{-1}) : TV = V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU, (Q, v) \longmapsto (\alpha^{-1}(Q), [s \mapsto \alpha^{-1}(Q + sv)]).$$

Dabei bewegt sich  $s \in I$  in einem reellen Intervall derart, dass  $Q + sv \in V$  ist (vergleiche Lemma 78.5). Da  $V \times \mathbb{R}^n$  ein Produkt von topologischen Räumen ist, ist  $TV = V \times \mathbb{R}^n$  selbst ein topologischer Raum, und es liegt nahe, diese Topologie auf  $TU$  zu übertragen und daraus insgesamt eine Topologie auf dem Tangentialbündel  $TM$  zu konstruieren.

**Definition 79.7.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und

$$TM = \bigsqcup_{P \in M} T_P M,$$

das Tangentialbündel versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi : TM \longrightarrow M, (P, v) \longmapsto P.$$

Das *Tangentialbündel* wird mit derjenigen Topologie versehen, bei der eine Teilmenge  $W \subseteq TM$  genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

die Menge  $(T(\alpha))(W \cap \pi^{-1}(U))$  offen in  $V \times \mathbb{R}^n$  ist.

Insbesondere ist für jede offene Menge  $U \subseteq M$  das Urbild  $\pi^{-1}(U) = TU \subseteq TM$  offen, d.h. die Projektion  $\pi$  ist stetig.

**Lemma 79.8.** *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*eine differenzierbare Abbildung. Es sei*

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

*die zugehörige Tangentialabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T(\varphi)} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array} .$$

- (2) *Für ein Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

*zu  $U \subseteq M$  offen und mit  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T(\alpha)} & TV = V \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\alpha} & V \end{array} .$$

- (3) *Wenn  $L$  eine weitere Mannigfaltigkeit und*

$$\psi : L \longrightarrow M$$

*eine weitere differenzierbare Abbildung ist, so gilt*

$$T(\varphi \circ \psi) = T(\varphi) \circ T(\psi).$$

- (4) *Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen sind und die Tangentialbündel mit  $M \times \mathbb{R}^m$  bzw.  $N \times \mathbb{R}^n$  identifiziert werden, so ist die Tangentialabbildung gleich*

$$M \times \mathbb{R}^m \longrightarrow N \times \mathbb{R}^n, (P, v) \longmapsto (\varphi(P), (D\varphi)_P(v)).$$

- (5) *Die Tangentialabbildung  $T(\varphi)$  ist stetig.*  
 (6) *Wenn  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, so ist  $T(\varphi)$  ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition der Tangentialabbildung. (2) folgt aus (1) unter Verwendung der natürlichen Identifizierung  $TV \cong V \times \mathbb{R}^n$  für eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ . (3) folgt aus Lemma 78.10 (3). (4) folgt aus Lemma 78.10 (1). (5). Sei

$$\beta : V \longrightarrow V'$$

mit  $V \subseteq N$  und  $V' \subseteq \mathbb{R}^n$  offen eine Karte für  $N$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  ebenfalls offen. Dann ist  $(T(\beta))^{-1}(V' \times Y)$  eine offene Menge in  $TN$ , und solche Mengen bilden eine Basis der Topologie von  $TN$ . Die Stetigkeit muss also nur für solche Mengen gezeigt zu werden. Dies bedeutet, dass wir  $N$  durch  $V$  ersetzen können, also annehmen können, dass eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow V$$

in eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  vorliegt. Wir müssen zeigen, dass das Urbild von  $V \times Y$  offen in  $TM$  ist. Dazu sei

$$\alpha : U \longrightarrow U'$$

eine beliebige Karte für  $M$ , und wir müssen die Offenheit von  $(T(\varphi))^{-1}(V \times Y) \cap TU$  zeigen. Damit sind wir in der unter (4) beschriebenen Situation. Wir müssen also die Stetigkeit der Abbildung

$$U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n, (P, v) \longmapsto (\varphi(P), (D\varphi)_P(v)),$$

beweisen, wobei wir nur die hintere Komponente, also  $(D\varphi)_P(v)$ , betrachten müssen. Die  $j$ -te Komponente davon ist

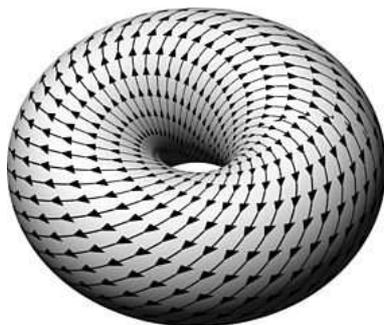
$$\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(P),$$

und dies sind nach der  $C^1$ -Differenzierbarkeits - Voraussetzung stetige Abbildungen. (6) folgt aus (5).  $\square$

**Definition 79.9.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung

$$F : M \longrightarrow TM$$

mit der Eigenschaft, dass  $F(P) \in T_P M$  für jeden Punkt  $P \in M$  ist, heißt (zeitunabhängiges) *Vektorfeld*.



Ein Vektorfeld auf einem Torus. Jedem Punkt des Torus wird eine tangentiale Richtung zugeordnet, dies wird durch die Pfeile angedeutet.

Ein Vektorfeld weist also jedem Punkt einen Richtungsvektor in diesem Punkt zu. Man sagt auch kurz, das ein Vektorfeld ein *Schnitt* im Tangentialbündel ist. Vektorfelder führen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten.

**Definition 79.10.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

$$T^*M = \bigsqcup_{P \in M} T_P^*M,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi : T^*M \longrightarrow M, (P, u) \longmapsto P,$$

und derjenigen Topologie, bei der eine Teilmenge  $W \subseteq T^*M$  genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

die Menge  $(T^*(\alpha))^{-1}(W \cap \pi^{-1}(U))$  offen in  $V \times (\mathbb{R}^n)^*$  ist, das *Kotangentialbündel* von  $M$ .

Die Schnitte im Kotangentialbündel heißen 1-Differentialformen. Wir werden darauf ausführlich zurückkommen.

## 80. VORLESUNG

### 80.1. Produkte von Mannigfaltigkeiten.

**Definition 80.1.** Es seien  $M$  und  $N$  zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit den Atlanten  $(U_i, U'_i, \alpha_i, i \in I)$  und  $(V_j, V'_j, \beta_j, j \in J)$ . Dann nennt man den Produktraum  $M \times N$  mit den Karten

$$\alpha_i \times \beta_j : U_i \times V_j \longrightarrow U'_i \times V'_j$$

(mit  $(i, j) \in I \times J$  und  $U'_i \times V'_j \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ) das *Produkt der Mannigfaltigkeiten*  $M$  und  $N$ .

Es handelt sich dabei in der Tat um eine Mannigfaltigkeit, siehe Aufgabe 80.1.

**Lemma 80.2.** *Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $M \times N$  ihr Produkt. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Projektionen*

$$p_M : M \times N \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto x,$$

und

$$p_N : M \times N \longrightarrow N, (x, y) \longmapsto y,$$

sind differenzierbare Abbildungen.

(2) *Der Tangentialraum in einem Punkt  $R = (P, Q)$  ist  $T_R(M \times N) = T_P M \times T_Q N$ .*

- (3) *Es sei  $L$  eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist eine Abbildung*

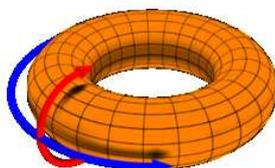
$$\varphi \times \psi : L \longrightarrow M \times N, u \longmapsto (\varphi(u), \psi(u)),$$

*genau dann differenzierbar, wenn die Komponentenabbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  differenzierbar sind.*

*Beweis.* (1). Durch Übergang zu Karten können wir annehmen, dass  $M$  und  $N$  offene Teilmengen im  $\mathbb{R}^m$  bzw. im  $\mathbb{R}^n$  sind. In diesem Fall handelt es sich um eine Einschränkung der linearen Projektion  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die nach Proposition 44.3 stetig differenzierbar ist. (2). Auch hier kann man zu Karten übergehen und annehmen, dass  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen sind. Für einen Punkt  $(P, Q)$  ist dann

$$T_{(P,Q)}(M \times N) = \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = T_P M \times T_Q N.$$

(3). Für einen fixierten Punkt  $A \in L$  kann man unter Verwendung von Kartenumgebungen von  $A$  und von  $\varphi(A)$  und  $\psi(A)$  sich darauf zurückziehen, dass alle drei Mannigfaltigkeiten offene Mengen in euklidischen Räumen sind, und dass  $M$  und  $N$  reelle Vektorräume sind. Wenn beide Abbildungen stetig differenzierbar sind, so folgt nach Aufgabe 44.7 die stetige (!) Differenzierbarkeit der Gesamtabbildung. Die Umkehrung ist klar.  $\square$



**Beispiel 80.3.** Das Produkt der Kreislinie mit sich selbst, also  $M = S^1 \times S^1$ , heißt *Torus*. Dies ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Da  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, lässt sich der Torus als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$  realisieren. Sie lässt sich aber auch als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  realisieren. Dazu seien  $r$  und  $R$  positive reelle Zahlen mit  $0 < r < R$ . Dann ist die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

ein Torus. Es handelt sich bei dieser Realisierung um die Oberfläche eines (aufgeblasenen) „Fahrradschlauches“, dessen „Radradius“ gleich  $R$  und dessen „Schlauchradius“ gleich  $r$  ist (das Rad liegt in der  $x - y$ -Ebene). Der Zusammenhang mit dem Produkt  $S^1 \times S^1$  ergibt sich, indem man dem Produktwinkel  $(\varphi, \psi)$  den Punkt  $((R + r \cos \psi) \cos \varphi, (R + r \cos \psi) \sin \varphi, r \sin \psi)$  zuordnet.

## 80.2. Das Dachprodukt.

Unsere Zielsetzung für die folgenden Wochen ist es, eine sinnvolle Volumentheorie auf Mannigfaltigkeiten zu entwickeln. Was ist beispielsweise der Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche wie der Oberfläche einer Kugel? Jeder Tangentialraum in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit ist ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und besitzt daher Borel-Lebesgue-Maße, die allerdings nur bis auf die Multiplikation mit einem Skalar wohlbestimmt sind. Für eine sinnvolle Maßtheorie müssen diese Maße in einer kontrollierbaren Weise von den Punkten der Mannigfaltigkeit abhängen. Dies kann man am besten mit Differentialformen erreichen, die wir schon erwähnt haben und bald studieren werden.

Ihre Konstruktion erleichtert sich wesentlich durch die sogenannten Dachprodukte eines Vektorraumes. Dachprodukte hängen stark mit Determinanten und allgemeiner mit multilinearen alternierenden Formen zusammen. Für die Existenz der Dachprodukte brauchen wir Restklassenräume. Diese beruhen auf einer fundamentalen algebraischen Konstruktion, für die wir auf einen Anhang verweisen.

Wir erinnern an multilineare und alternierende Abbildungen.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\Delta : V^n = \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Man nennt  $\Delta$  *multilinear*, wenn für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  und jedes  $(n-1)$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  die induzierte Abbildung

$$V \longrightarrow K, u \longmapsto \Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

linear ist.

Eine multilineare Abbildung  $\Delta$  heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: falls in  $v = (v_1, \dots, v_n)$  zwei Einträge übereinstimmen, also  $v_i = v_j$  für ein Paar  $i \neq j$ , so ist  $\Delta(v) = 0$ .

Das wichtigste Beispiel ist die Determinante, die eng mit der Volumenmessung zusammenhängt. Für die Maßtheorie auf Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Konzept, dass für jeden Punkt eine infinitesimale Volumenform beschreibt, und dafür braucht man in jedem Tangentialraum eine Determinante. Da es allerdings keine Einheitswürfel in den Tangentialräumen gibt, wird es keine eindeutig bestimmte Determinantenfunktion geben, sondern verschiedene Determinantenfunktionen, die sich punktweise um einen Skalar unterscheiden. Ferner möchten wir nicht nur volldimensionalen Objekten ein Volumen zuordnen, sondern auch kleinerdimensionalen Objekten, wofür wir alternierende Formen von kleinerem Grad brauchen. Hier entwickeln wir die dazu benötigte lineare Algebra.

**Konstruktion 80.4.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir konstruieren das sogenannte  $n$ -te *Dachprodukt* von  $V$  mit sich selbst, geschrieben  $\bigwedge^n V$ . Dazu betrachten wir alle Symbole der Form

$$e_{(v_1, \dots, v_n)} \text{ mit } v_i \in V.$$

Diese Symbolmenge, die in Bijektion zu  $V^n$  steht, bezeichnen wir mit  $S$ . Wir betrachten den Vektorraum

$$H = K^{(S)},$$

das ist die Menge aller (endlichen) Summen

$$a_1 s_1 + \dots + a_k s_k \text{ mit } a_i \in K \text{ und } s_i \in S.$$

Dies ist mit der natürlichen Addition und der natürlichen Skalarmultiplikation ein Vektorraum, und zwar ein Untervektorraum des Abbildungsraumes  $\text{Abb}(S, K)$  (es handelt sich bei  $H$  um die Menge derjenigen Vektoren, die für fast alle Elemente  $s \in S$  den Wert 0 haben). In  $H$  betrachten wir den Untervektorraum  $U$ , der von den folgenden Elementen erzeugt wird (die man die *Standardrelationen* des Dachprodukts nennt).

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v+w, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}$$

für beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v, w \in V$ .

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, av, v_{i+1}, \dots, v_n)} - ae_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)}$$

für beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v \in V$  und  $a \in K$ .

$$e_{(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n)}$$

für  $i < j$  und beliebige  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v \in V$ .

Dabei ist der Leitgedanke, die Regeln, die für eine alternierende multilineare Abbildung gelten müssen, dadurch zu erzwingen, dass man die obigen Relationen zu 0 macht. Der erste Typ repräsentiert die Additivität in jedem Argument, die zweite die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation, die dritte die alternierende Eigenschaft.

Man setzt nun

$$\bigwedge^n V := H/U,$$

d.h. man bildet den Restklassenraum von  $H$  modulo dem Unterraum  $U$ .

Die Elemente  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  bilden dabei ein Erzeugendensystem von  $H$ . Die Restklasse von  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  modulo  $U$  bezeichnen wir mit<sup>8</sup>

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

<sup>8</sup>Es ist nicht einfach, sich unter den Ausdrücken  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  bzw.  $\wedge$  etwas vorzustellen. Wichtiger als die „Bedeutung“ dieser Symbole ist ihr Transformationsverhalten und die Rechenregeln, die dafür gelten. Erst der operative Umgang mit diesen Symbolen lässt die Bedeutung entstehen. Wenn man aber eine ungefähre Vorstellung haben möchte, so kann man sagen, dass  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  das von den Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  erzeugte „orientierte“ Parallelotop in  $V$  repräsentiert. Das Dachprodukt  $\bigwedge^n V$  besteht dann aus Linearkombinationen von solchen Parallelotopen.

Die Standardrelationen werden dann zu den Rechenregeln<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge (v + w) \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n \\ = & v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n + v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n, \\ & v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge av \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n \\ = & a \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n \end{aligned}$$

und

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_{j-1} \wedge v \wedge v_{j+1} \wedge \dots \wedge v_n = 0.$$

**Definition 80.5.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Man nennt den (in Konstruktion 80.4 konstruierten)  $K$ -Vektorraum  $\bigwedge^n V$  die  $n$ -te *äußere Potenz* (oder das  $n$ -te *Dachprodukt*) von  $V$ . Die Abbildung

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

nennt man die *universelle alternierende Abbildung*.

**Lemma 80.6.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann gelten für die äußeren Potenzen folgende Aussagen.*

- (1) *Die Elemente der Form  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  mit  $v_i \in V$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$ .*
- (2) *Die Abbildung*

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

*ist multilinear und alternierend.*

- (3) *Es ist*

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge w \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n \\ = & -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n. \end{aligned}$$

- (4) *Seien  $u_1, \dots, u_m \in V$  gegeben und seien  $v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}u_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist*

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \dots \wedge v_n \\ = & \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, m\}^n} \left( \prod_{j=1}^n a_{i_j j} \right) u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_n} \end{aligned}$$

*Beweis.* (1) folgt direkt aus der Konstruktion. (2). Es liegt die zusammengesetzte Abbildung

$$V^n \longrightarrow H \cong K^{(V^n)} \longrightarrow H/U$$

<sup>9</sup>Es gilt die Klammerungskonvention „Dachprodukt vor Punktrechnung“, d.h. der Ausdruck  $av_1 \wedge \dots \wedge v_n$  ist als  $a(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$  zu lesen. Es gelten aber ohnehin die Gleichheiten

$$a(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = (av_1) \wedge \dots \wedge v_n = v_1 \wedge \dots \wedge (av_n).$$

vor, wobei  $(v_1, \dots, v_n)$  auf  $e_{(v_1, \dots, v_n)}$  und dies auf die Restklasse  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  abgebildet wird. Dabei sichert die Definition des Unterraums  $U$ , dass jeweils die Eigenschaften einer multilinearen alternierenden Abbildung erfüllt sind. (3) gilt für jede alternierende Abbildung. (4) gilt für jede multilineare Abbildung.  $\square$

**Korollar 80.7.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Es seien  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  Vektoren in  $V$ , die miteinander in der Beziehung*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

stehen, wobei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix bezeichnet. Dann gilt in  $\bigwedge^n V$  die Beziehung

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n = (\det M) v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

*Beweis.* Nach Lemma 80.6 (4) gilt

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^n} \left( \prod_{j=1}^n a_{i_j j} \right) v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}.$$

Dabei wird über alle Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  aufsummiert, da der Summand gleich 0 ist, sobald sich ein Index wiederholt. Für eine Permutation  $\sigma$  mit  $\sigma(j) = i_j$  gilt nach Lemma 80.6 (3)

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} = \operatorname{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Daher folgt die Aussage aus der Leibniz-Formel für die Determinante.  $\square$

## 81. VORLESUNG

### 81.1. Eigenschaften des Dachprodukts.

Die folgende Aussage beschreibt die universelle Eigenschaft des Dachproduktes.

**Satz 81.1.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei*

$$\psi : V^n \longrightarrow W$$

*eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren  $K$ -Vektorraum  $W$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$\tilde{\psi} : \bigwedge^n V \longrightarrow W$$

*derart, dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V^n & \longrightarrow & \bigwedge^n V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

kommutiert.

*Beweis.* Wir verwenden die Notation aus Konstruktion 80.4. Durch die Zuordnung

$$e_{(v_1, \dots, v_n)} \mapsto \psi(v_1, \dots, v_n)$$

wird nach Satz 12.3 eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\bar{\psi} : H \longrightarrow W$$

definiert. Da  $\psi$  multilinear und alternierend ist, wird unter  $\bar{\psi}$  der Untervektorraum  $U \subseteq H$  auf 0 abgebildet. Nach Satz RKR.4 gibt es daher eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\tilde{\psi} : H/U \longrightarrow W,$$

die mit  $\bar{\psi}$  verträglich ist. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass die  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$  bilden und diese auf  $\psi(v_1, \dots, v_n)$  abgebildet werden müssen.  $\square$

**Korollar 81.2.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\left(\bigwedge^n V\right)^* \longrightarrow \text{Alt}^n(V, K), \psi \longmapsto ((v_1, \dots, v_n) \mapsto \psi(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)).$$

*Beweis.* Die Bijektivität der Abbildung folgt aus Satz 81.1, angewendet auf  $W = K$ . Die Linearität folgt aus den linearen Strukturen des Dualraumes und des Raumes der alternierenden Formen.  $\square$

**Satz 81.3.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $m$ . Es sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von  $V$  und es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann bilden die Dachprodukte*

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$$

eine Basis von  $\bigwedge^n V$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass ein Erzeugendensystem vorliegt. Da die Elemente der Form  $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$  nach Lemma 80.6 (1) ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^n V$  bilden, genügt es zu zeigen, dass man diese durch die angegebenen Elemente darstellen kann. Für jedes  $w_j$  gibt es eine Darstellung  $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$ , daher kann man nach Lemma 80.6 (4) die  $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$  darstellen als Linearkombinationen von Dachprodukten der Basiselemente, wobei allerdings jede Reihenfolge vorkommen kann. Sei also  $v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_n}$  gegeben mit  $k_j \in \{1, \dots, m\}$ . Durch Vertauschen von benachbarten Vektoren kann man nach Lemma 80.6 (3) (unter Inkaufnahme eines anderen Vorzeichens) erreichen, dass die Indizes (nicht notwendigerweise streng) aufsteigend geordnet sind. Wenn sich ein Index wiederholt, so ist nach Lemma 80.6 (2) das Dachprodukt 0. Also wiederholt sich kein Index und diese Dachprodukte sind in der gewünschten Form.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit zeigen wir, dass es zu jeder  $n$ -elementigen Teilmenge  $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  (mit  $i_1 < \dots < i_n$ ) eine  $K$ -lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow K$$

gibt, die  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}$  nicht auf 0 abbildet, aber alle anderen in Frage stehenden Dachprodukte auf 0 abbildet. Dazu genügt es nach Satz 81.1, eine alternierende multilineare Abbildung

$$\Delta : V^n \longrightarrow K$$

anzugeben mit  $\Delta(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \neq 0$ , aber mit  $\Delta(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) = 0$  für jedes andere aufsteigende Indextupel. Es sei  $U$  der von den  $v_i$ ,  $i \neq i_k$ , erzeugte Untervektorraum von  $V$  und  $W = V/U$  der Restklassenraum. Dann bilden die Bilder der  $v_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , eine Basis von  $W$ , und die Bilder von allen anderen  $n$ -Teilmengen der gegebenen Basis bilden dort keine Basis, da mindestens ein Element davon auf 0 geht. Wir betrachten nun die zusammengesetzte Abbildung

$$\Delta : V^n \longrightarrow W^n \cong (K^n)^n \xrightarrow{\det} K.$$

Diese Abbildung ist nach Satz 14.11 multilinear und nach Satz 14.12 alternierend. Nach Satz 14.13 ist  $\Delta(z_1, \dots, z_n) = 0$  genau dann, wenn die Bilder von  $z_i$  in  $W$  keine Basis bilden.  $\square$

Bei  $V = K^m$  mit der Standardbasis  $e_1, \dots, e_m$  nennt man die  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$  mit  $i_1 < \dots < i_n$  die *Standardbasis* von  $\bigwedge^n K^m$ .

**Korollar 81.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $m$ . Dann besitzt das  $n$ -te äußere Produkt  $\bigwedge^n V$  die Dimension*

$$\binom{m}{n}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 81.3 und Lemma 6.5.  $\square$

Insbesondere ist die äußere Potenz für  $n = 0$  eindimensional (es ist  $\bigwedge^0 V = K$ ) und für  $n = 1$   $m$ -dimensional (es ist  $\bigwedge^1 V = V$ ). Für  $n = m$  ist  $\bigwedge^m V$  eindimensional, und die Determinante induziert (nach einer Identifizierung von  $V$  mit  $K^m$ ) einen Isomorphismus

$$\bigwedge^m V \longrightarrow K, (v_1, \dots, v_m) \longmapsto \det(v_1, \dots, v_m).$$

Für  $n > m$  sind die äußeren Produkte der Nullraum und besitzen die Dimension 0.

Wir erweitern die oben gezeigte natürliche Isomorphie  $(\bigwedge^n V)^* \cong \text{Alt}^n(V, K)$  zu einer natürlichen Isomorphie

$$\bigwedge^n V^* \cong (\bigwedge^n V)^* \cong \text{Alt}^n(V, K).$$

**Satz 81.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\psi : \bigwedge^k V^* \longrightarrow (\bigwedge^k V)^*$$

mit

$$(\psi(f_1 \wedge \dots \wedge f_k))(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \det(f_i(v_j))_{ij}$$

(mit  $f_i \in V^*$  und  $v_j \in V$ ).

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung (mit  $k$  Faktoren)

$$V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \text{Abb}(V \times \dots \times V, K)$$

mit

$$(f_1, \dots, f_k) \longmapsto ((v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det((f_i(v_j))_{ij})).$$

Für fixierte  $f_1, \dots, f_k$  ist die Abbildung rechts multilinear und alternierend, wie eine direkte Überprüfung unter Verwendung der Determinantenregeln zeigt. Daher entspricht diese nach Korollar 81.2 einem Element in  $(\bigwedge^k V)^*$ . Insgesamt liegt also eine Abbildung

$$V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow (\bigwedge^k V)^*$$

vor. Eine direkte Prüfung zeigt, dass die Gesamtzuordnung ebenfalls multilinear und alternierend ist. Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es daher eine lineare Abbildung

$$\psi : \bigwedge^k V^* \longrightarrow (\bigwedge^k V)^*.$$

Diese müssen wir als Isomorphismus nachweisen. Sei dazu  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  mit der zugehörigen Dualbasis  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Nach Satz 81.3 bilden die

$$v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

eine Basis von  $\bigwedge^k V^*$ . Ebenso bilden die

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

eine Basis von  $\bigwedge^k V$  mit zugehöriger Dualbasis  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$ . Wir zeigen, dass  $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*$  unter  $\psi$  auf  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$  abgebildet wird. Für  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  ist

$$\begin{aligned} & (\psi(v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*))(v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}) \\ &= \det((v_{i_r}^*(v_{j_s}))_{rs}). \end{aligned}$$

Bei  $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$  gibt es ein  $i_r$ , das von allen  $j_s$  verschieden ist. Daher ist die  $r$ -te Zeile der Matrix 0 und somit ist die Determinante 0. Wenn dagegen die Indexmengen übereinstimmen, so ergibt sich die Einheitsmatrix mit der Determinante 1. Diese Wirkungsweise stimmt mit der von  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})^*$  überein.  $\square$

## 81.2. Dachprodukte bei linearen Abbildungen.

**Korollar 81.6.** *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung. Dann gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine  $K$ -lineare Abbildung*

$$\bigwedge^n \varphi : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_n)$ .*

*Beweis.* Die Abbildung

$$V^n \xrightarrow{\varphi \times \dots \times \varphi} W^n \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n W$$

ist multilinear und alternierend. Daher gibt es nach Satz 81.1 eine eindeutig bestimmte alternierende multilineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_n)$ .  $\square$

**Proposition 81.7.** *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung. Zu  $n \in \mathbb{N}$  sei*

$$\bigwedge^n \varphi : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

*die zugehörige  $K$ -lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Wenn  $\varphi$  surjektiv ist, dann ist auch  $\bigwedge^n \varphi$  surjektiv.*
- (2) *Wenn  $\varphi$  injektiv ist, dann ist auch  $\bigwedge^n \varphi$  injektiv.*
- (3) *Wenn  $U$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und*

$$\psi : U \longrightarrow V$$

*eine weitere  $K$ -lineare Abbildung ist, so gilt*

$$\bigwedge^n (\varphi \circ \psi) = \left( \bigwedge^n \varphi \right) \circ \left( \bigwedge^n \psi \right).$$

*Beweis.* (1). Seien  $w_1, \dots, w_n \in W$  gegeben und seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  Urbilder davon, also  $\varphi(v_i) = w_i$ . Dann ist

$$\left(\bigwedge^n \varphi\right)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = w_1 \wedge \dots \wedge w_n.$$

Nach Lemma 80.6 (1) ergibt sich die Surjektivität. (2). Wir können annehmen, dass  $V$  endlichdimensional ist. Die Aussage folgt dann aufgrund der expliziten Beschreibung der Basen in Satz 81.3. (3). Es genügt, die Gleichheit für das Erzeugendensystem  $u_1 \wedge \dots \wedge u_n$  mit  $u_i \in U$  zu zeigen, wofür es klar ist.  $\square$

**Lemma 81.8.** *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte multilineare Abbildung*

$$\left(\bigwedge^n V\right) \times \left(\bigwedge^m V\right) \longrightarrow \bigwedge^{n+m} V$$

mit

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_n, w_1 \wedge \dots \wedge w_m) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_m.$$

*Beweis.* Da die Dachprodukte  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  bzw.  $w_1 \wedge \dots \wedge w_m$  jeweils Erzeugendensysteme sind, kann es maximal eine multilineare Abbildung geben, die für die Dachprodukte einfach die Verkettung ist. Für beliebige Linearkombinationen  $\alpha = \sum_{i \in I} a_i v_{i1} \wedge \dots \wedge v_{in}$  und  $\beta = \sum_{j \in J} b_j w_{j1} \wedge \dots \wedge w_{jm}$  muss dann (wegen der geforderten Multilinearität)

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \left(\sum_{i \in I} a_i v_{i1} \wedge \dots \wedge v_{in}\right) \wedge \left(\sum_{j \in J} b_j w_{j1} \wedge \dots \wedge w_{jm}\right) \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j v_{i1} \wedge \dots \wedge v_{in} \wedge w_{j1} \wedge \dots \wedge w_{jm} \end{aligned}$$

gelten. Wir müssen zeigen, dass dadurch eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist, d.h. dass die Summe rechts nicht von den für  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gewählten Darstellungen abhängt. Sei also  $\alpha = \sum_{i \in I} c_i v_{i1} \wedge \dots \wedge v_{in}$  eine zweite Darstellung, wobei wir die Indexmenge als gleich annehmen dürfen, da wir fehlende Summanden mit dem Koeffizienten 0 versehen können. Die Differenz  $\sum_{i \in I} (a_i - c_i) v_{i1} \wedge \dots \wedge v_{in}$  ist dann eine (im Allgemeinen nicht triviale) Darstellung der 0, d.h. es ist eine Linearkombination aus den in Konstruktion 80.4 beschriebenen Standardrelationen für das Dachprodukt. Wenn man zu einer solchen Standardrelation der Länge  $n$  ein beliebiges Dachprodukt  $w_1 \wedge \dots \wedge w_m$  „dranhängt“, so erhält man eine Standardrelation der Länge  $n + m$ . Dies bedeutet, dass aus einer Darstellung der 0 bei der Verknüpfung mit einem beliebigen  $\beta$  eine Darstellung der 0 entsteht. Daher ist das Dachprodukt  $\alpha \wedge \beta$  unabhängig von der gewählten Darstellung für  $\alpha$ . Da man die Rollen von  $\alpha$  und  $\beta$  vertauschen kann, ist die Darstellung auch unabhängig von der gewählten Darstellung für  $\beta$ . Die Multilinearität folgt unmittelbar aus der expliziten Beschreibung.  $\square$

## 82. VORLESUNG

## 82.1. Orientierungen auf reellen Vektorräumen.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei zweidimensionale reelle Vektorräume mit den Basen  $v_1, v_2$  bzw.  $w_1, w_2$ . Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gegeben mit  $\varphi(v_1) = aw_1 + bw_2$  und  $\varphi(v_2) = cw_1 + dw_2$ . Die Matrix, die diese lineare Abbildung beschreibt, ergibt sich, indem man die Koordinaten des Bildvektors des  $i$ -ten Basisvektors als  $i$ -te Spalte schreibt. Bei der gegebenen Nummerierung ergibt sich also die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante  $ab - cd$ . Wenn man hingegen die Reihenfolge von  $v_1$  und  $v_2$  vertauscht (also mit der Basis  $u_1 = v_2$  und  $u_2 = v_1$  arbeitet), so ist die beschreibende Matrix

$$\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

mit der Determinante  $cd - ab = -(ab - cd)$ . Abhängig von der gewählten Basis kann also die Determinante mal positiv, mal negativ sein (bei einem Endomorphismus kann das nicht passieren, wenn man vorne und hinten stets die gleiche Basis nimmt).

Im Folgenden ist es wichtig, dass man unter einer Basis nicht die Menge der Basisvektoren  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , sondern das geordnete Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  der Basisvektoren versteht.

**Definition 82.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Man nennt zwei Basen  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  *orientierungsgleich*, wenn die Determinante ihrer Übergangsmatrix positiv ist.

Diese Relation zwischen Basen ist eine Äquivalenzrelation, und zwar eine, bei der es nur zwei Äquivalenzklassen (genannt *Orientierungen* oder *Orientierungsklassen*) gibt (außer beim Nullraum).

**Definition 82.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine *Orientierung* auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Basen von  $V$  unter der Äquivalenzrelation, orientierungsgleich zu sein.<sup>10</sup>

Es ist einfach, zu bestimmen, ob zwei Basen die gleiche oder die entgegengesetzte Orientierung besitzen, es macht aber keinen Sinn, die einzelnen Orientierungen zu benennen.

<sup>10</sup>Bei einem 0-dimensionalen Vektorraum, also dem Nullraum, gibt es nur die leere Basis. Es ist aber dennoch sinnvoll, von zwei Orientierungen auf dem Nullraum zu sprechen, die wir durch  $+$  und  $-$  repräsentieren.



Viele Objekte aus Natur und Technik machen deutlich, dass es zwei verschiedene Orientierungen gibt. Es ist einfach, bei gleichartigen Objekten wie Federn die mit der gleichen und die mit der entgegengesetzten Orientierung zu erkennen. Die Benennung der beiden Orientierungen und welchen mathematischen (durch eine Basis repräsentierten) Orientierungen sie entsprechen ist eine Frage der Konvention.

**Definition 82.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Er heißt *orientiert*, wenn auf ihm eine Orientierung erklärt ist.

Ein Vektorraum wird dadurch orientiert, indem man bspw. sagt, dass  $V$  die Orientierung tragen möge, die durch die Basis  $v_1, \dots, v_n$  repräsentiert wird. Der Standardraum  $\mathbb{R}^n$  trägt, wenn nichts anderes gesagt wird, die sogenannte *Standardorientierung*, die durch die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  repräsentiert wird.

**Definition 82.4.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *orientierungstreu*, wenn für jede Basis  $v_1, \dots, v_n$ , die die Orientierung auf  $V$  repräsentiert, die Bildvektoren  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  die Orientierung auf  $W$  repräsentieren.

Es genügt, diese Eigenschaft für eine einzige, die Orientierung repräsentierende Basis nachzuweisen, siehe Aufgabe 82.4.

Bei einem eindimensionalen reellen Vektorraum  $V$  (einer Geraden) ist eine Orientierung einfach durch einen einzigen Vektor  $v \neq 0$  gegeben, d.h. es wird einfach eine der beiden „Halbgeraden“ als positiv ausgezeichnet. Dies ist wiederum äquivalent zu einer Identifizierung von  $V$  mit  $\mathbb{R}$ , der mit der Standardorientierung versehen ist, bei der 1 positiv ist. Unter Bezug auf das Dachprodukt kann man generell die Orientierung auf einem reellen Vektorraum auf die Orientierung einer Geraden zurückführen, wie die folgende Aussage zeigt.

**Lemma 82.5.** *Es sei  $V \neq 0$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum der Dimension  $n$ . Dann entsprechen durch die Zuordnung*

$$[v_1, \dots, v_n] \longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_n]$$

*die Orientierungen auf  $V$  den Orientierungen auf  $\bigwedge^n V$ .*

*Beweis.* Es seien  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  zwei Basen von  $V$  mit der Übergangsbeziehung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Korollar 80.7

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n = (\det M) v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

woraus die Wohldefiniertheit der Abbildung und die Aussage folgt.  $\square$



Eine rechtswinkende Winkerkrabbe. Wenn sie sich auf einer dreidimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit bewegt, bleibt sie stets rechtswinkend (weshalb es sich um einen sinnvollen Begriff handelt). Auf einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit kann sie linkswinkend werden.

## 82.2. Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten.

**Definition 82.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen heißt *orientiert*, wenn der  $\mathbb{R}^n$  orientiert ist.

Wenn man einen Atlas aus orientierten Karten  $(U_i, V_i, \alpha_i)$  hat, so haben die Orientierungen auf den umgebenden Zahlräumen  $\mathbb{R}^n$ , in denen die offenen Bilder  $V_i$  der Karten liegen, erstmal nichts miteinander zu tun (obwohl man stets  $\mathbb{R}^n$  schreibt). Ein Zusammenhang zwischen den Orientierungen wird erst durch die beiden folgenden Begriffe formulierbar.

**Definition 82.7.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und es seien  $(U_1, V_1, \alpha_1)$  und  $(U_2, V_2, \alpha_2)$  orientierte Karten. Dann heißt der zugehörige Kartenwechsel

$$\psi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow V_2 \cap \alpha_2(U_1 \cap U_2)$$

*orientierungstreu*, wenn für jeden Punkt  $Q \in V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2)$  das totale Differential

$$(D\psi)_Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

orientierungstreu ist.

**Definition 82.8.** Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem Atlas  $(U_i, V_i, \alpha_i)$  heißt *orientiert*, wenn jede Karte orientiert ist und wenn sämtliche Kartenwechsel orientierungstreu sind.



Das Möbius-Band ist das typische Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit. Damit es eine Mannigfaltigkeit ist, darf der Rand nicht dazu gehören; dann ist es aber auch keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , diese sind nämlich stets orientierbar.

Bei einer orientierten Mannigfaltigkeit besitzt jeder Tangentialraum  $T_P M$  eine Orientierung. Man kann einfach eine beliebige Kartenumgebung  $P \in U$  wählen und die Orientierung auf  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mittels  $T_P(\alpha^{-1})$  nach  $T_P M$  transportieren. Wegen der Orientierungstreue der Kartenwechsel ist diese Orientierung unabhängig von der gewählten Kartenumgebung.

In einer orientierten Mannigfaltigkeit kann man auch zu zwei Basen in den Tangentialräumen zu zwei verschiedenen Punkten sagen, ob sie die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht. Dies ist der Fall, wenn beide Basen die Orientierung der Mannigfaltigkeit repräsentieren oder aber beide nicht.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn sie diffeomorph zu einer orientierten Mannigfaltigkeit ist. D.h. wenn es einen Atlas gibt, der die gleiche differenzierbare Struktur definiert und der zusätzlich orientiert werden kann.

### 82.3. Kompaktheit.

Teilmengen eines euklidischen Raumes, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind, nennt man kompakt. Auf topologischen Räumen, die nicht durch eine Metrik gegeben sind, kann man nicht von beschränkt sprechen, aber auch bei einem metrischen Raum, der keine Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$  ist, führen die beiden Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt nicht sehr weit. Schlagkräftiger ist das folgende Konzept.

**Definition 82.9.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge}$$

eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  gibt derart, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Diese Eigenschaft nennt man manchmal auch *überdeckungskompakt*. Häufig nimmt man zu kompakt noch die Eigenschaft Hausdorffsch mit auf. Es sei betont, dass diese Eigenschaft nicht besagt, dass es eine endliche Überdeckung aus offenen Mengen gibt (es gibt immer die triviale offene Überdeckung mit dem Gesamtraum), sondern dass man, wenn irgendeine irgendwie indizierte offene Überdeckung vorliegt, dann nur eine endliche Teilmenge aus der Indexmenge für die Überdeckung nötig ist.

**Lemma 82.10.** *Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann ist  $X$  genau dann kompakt, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  einen Häufungspunkt (in  $X$ ) besitzt.*

*Beweis.* Sei  $X$  kompakt und sei eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben. Nehmen wir an, dass diese Folge keinen Häufungspunkt besitzt. Das bedeutet, dass es zu jedem  $y \in X$  eine offene Umgebung  $y \in U_y$  gibt, in der es nur endlich viele Folgenglieder gibt. Wegen  $X = \bigcup_{y \in X} U_y$  gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ . Diese enthält einerseits alle Folgenglieder und andererseits nur endlich viele Folgenglieder, ein Widerspruch.

Sei die Folgeeigenschaft erfüllt und sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine Überdeckung mit offenen Mengen. Da  $X$  eine abzählbare Basis besitzt, gibt es nach Aufgabe 63.4 eine abzählbare Teilmenge  $J \subseteq I$  mit  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Wir können  $J = \mathbb{N}$  annehmen. Nehmen wir an, dass die Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist insbesondere  $\bigcup_{i=0}^n U_i \neq X$ , und daher gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X$  mit  $x_n \notin \bigcup_{i=0}^n U_i$ . Nach Voraussetzung besitzt diese Folge einen Häufungspunkt  $x$ . Da eine Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  vorliegt, gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $x \in U_k$ . Da  $x$  ein Häufungspunkt ist, liegen unendlich viele Folgenglieder in  $U_k$ . Dies ist ein Widerspruch, da nach Konstruktion für  $n \geq k$  die Folgenglieder  $x_n$  nicht zu  $U_k$  gehören.  $\square$

**Satz 82.11.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $T$  ist überdeckungskompakt.
- (2) Jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$  besitzt einen Häufungspunkt in  $T$ .
- (3) Jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$  besitzt eine in  $T$  konvergente Teilfolge.
- (4)  $T$  ist abgeschlossen und beschränkt.

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde allgemeiner in Lemma 82.10 bewiesen. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar. Die Äquivalenz von (3) und (4) wurde in Satz 22.3 gezeigt.  $\square$

#### 82.4. Maße auf Mannigfaltigkeiten.

Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Gibt es ein sinnvolles Volumen für (Teilmengen von)  $M$ , wann kann man eine auf  $M$  definierte Funktion sinnvoll

integrieren? Wenn man die Maßtheorie als allgemeines Konzept zugrunde legt, so ergibt sich folgendes Bild: es sei vorausgesetzt, dass  $M$  einen abzählbaren Atlas  $(U_i, V_i, \alpha_i, i \in I)$  besitzt. Ein Maß  $\mu$  auf den Borelmengen  $\mathcal{B}(M)$  ist dann durch die Einschränkungen  $\mu_i = \mu|_{U_i}$  des Maßes auf die offenen Teilmengen  $U_i$  eindeutig bestimmt. Für jedes  $i \in I$  definiert die Homöomorphie

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$$

das Bildmaß  $\nu_i = \alpha_{i*}\mu_i$  auf  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dabei stehen die Bildmaße  $\nu_i, i \in I$ , untereinander in der Beziehung

$$\nu_i(\alpha_i(T)) = \mu(T) = \nu_j(\alpha_j(T))$$

für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq U_i \cap U_j$ . Mit den Kartenwechseln  $\psi_{ij} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1}$  bedeutet dies

$$\nu_i(S) = \nu_j(\psi_{ij}(S))$$

für jede messbare Menge  $S \subseteq V_i$ , die ganz innerhalb des Definitionsbereiches der Übergangsabbildung liegt.

Nehmen wir nun an, dass sich die Bildmaße  $\nu_i$  jeweils mit einer Dichte bzgl. des Borel-Lebesgue-Maßes  $\lambda^n$  schreiben lassen, sagen wir

$$\nu_i = g_i d\lambda^n,$$

mit auf  $V_i$  definierten integrierbaren Funktionen  $g_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ . Für eine messbare Teilmenge  $T \subseteq U_i$  gilt dann also

$$\mu(T) = \nu_i(\alpha_i(T)) = \int_{\alpha_i(T)} g_i d\lambda^n.$$

Für eine messbare Teilmenge  $T \subseteq U_i \cap U_j$  gilt somit nach der Transformationsformel, angewendet auf die diffeomorphe Übergangsabbildung

$$\psi_{ij} : V_i \cap \alpha_i(U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i),$$

die  $\alpha_i(T)$  in  $\alpha_j(T)$  überführt, die Gleichheit

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i(T)} g_i d\lambda^n &= \int_{\alpha_j(T)} g_j d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_i(T)} |\det(D\psi_{ij})| \cdot (\psi_{ij} \circ g_j) d\lambda^n. \end{aligned}$$

Dies legt für die Dichtefunktionen  $g_i, i \in I$ , das Transformationsverhalten

$$g_i = |\det(D\psi_{ij})| \cdot (\psi_{ij} \circ g_j)$$

nahe (auch wenn es dies nicht erzwingt, da eine Dichte durch ihr Maß nicht eindeutig bestimmt ist). Wir werden die Integrationstheorie für Mannigfaltigkeiten auf dem Konzept der  $n$ -Differentialformen aufbauen, die in natürlicher Weise dieses Transformationsverhalten (ohne den Betrag) besitzen.

## 83.1. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Zu einer Mannigfaltigkeit  $M$  kann man zum Tangentialbündel  $TM$  (bzw. zum Kotangentialbündel  $T^*M$ ) das  $k$ -te Dachprodukt  $\bigwedge^k TM$  (bzw.  $\bigwedge^k T^*M$ ) bilden. Es ist punktweise für  $P \in M$  durch

$$\left(\bigwedge^k TM\right)_P = \bigwedge^k T_P M$$

definiert und es gibt wieder eine Projektionsabbildung

$$\bigwedge^k TM \longrightarrow M.$$

Zu einer Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V,$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ , und der zugehörigen Identifizierung

$$T\alpha : TU \longrightarrow TV = V \times \mathbb{R}^n$$

ergibt sich die Identifizierung

$$\bigwedge^k (T\alpha) : \bigwedge^k TU \longrightarrow \bigwedge^k TV = V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^n.$$

Mit Hilfe dieser Abbildungen kann man auf  $\bigwedge^k TM$  eine Topologie und auch eine Mannigfaltigkeitsstruktur definieren.

**Definition 83.1.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine  $k$ -Differentialform (oder  $k$ -Form oder Form vom Grad  $k$ ) ist ein Schnitt im  $k$ -fachen Dachprodukt des Kotangentialbündels, also eine Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M, P \longmapsto \omega(P),$$

mit  $\omega(P) \in \bigwedge^k T_P^*M$ .

Wir bezeichnen die Menge der  $k$ -Formen auf  $M$  mit

$$\mathcal{E}^k(M).$$

**Bemerkung 83.2.** Eine  $k$ -Form ordnet also jedem Punkt  $P$  der Mannigfaltigkeit ein Element aus  $\bigwedge^k T_P^*M$  zu. Dies ist nach Korollar 81.2 und nach Satz 81.5 das gleiche wie eine alternierende multilineare Abbildung

$$T_P M \times \cdots \times T_P M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Eine solche Abbildung bezeichnen wir ebenfalls mit  $\omega(P)$ ; für  $k$  Tangentialvektoren  $v_1, \dots, v_k \in T_P M$  ist also

$$\omega(P)(v_1, \dots, v_k)$$

eine reelle Zahl. Dabei treten also zwei grundverschiedene Argumente auf, einerseits der Punkt der Mannigfaltigkeit und andererseits Elemente aus dem

Tangentialraum an diesem Punkt. Die Abhängigkeit von den Tangentialvektoren ist verhältnismäßig einfach, da es sich ja um eine alternierende multilineare Abbildung handelt, dagegen ist die Abhängigkeit von der Mannigfaltigkeit beliebig kompliziert. Da die Dachprodukte des Kotangentialbündels nach Aufgabe 83.6 selbst Mannigfaltigkeiten sind, kann man sofort von stetigen oder differenzierbaren Differentialformen sprechen.

Für  $k = 0$  kommt der Kotangentialraum nur formal vor, eine 0-Form ist nichts anderes als eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine 1-Form (man spricht auch von einer *Pfaffschen Form*) ordnet jedem Punkt und jedem Tangentialvektor an  $P$  eine reelle Zahl zu. Für  $k > n = \dim M$  ist das  $k$ -fache Dachprodukt der Nullraum und daher gibt es gar keine nichttrivialen Formen von diesem Grad. Besonders wichtig ist der Fall  $k = n = \dim M$ . Dann besitzt das  $n$ -te Dachprodukt den Rang 1 (d. h. die Dimension ist in jedem Punkt 1) und ein Schnitt darin wird lokal durch eine einzige Funktion beschrieben. Eine empfehlenswerte Vorstellung ist dabei, dass zu  $n$  Tangentialvektoren die Zahl  $\omega(P)(v_1, \dots, v_n)$  das („orientierte“) Volumen des durch die Vektoren im Tangentialraum aufgespannten Paralleltops angibt. Diese Vorstellung ist auch bei kleineren  $k$  hilfreich, mit den  $\omega(P)(v_1, \dots, v_k)$  kann man das  $k$ -dimensionale Volumen des durch  $k$  Tangentialvektoren erzeugten Paralleltops berechnen. Diese Vorstellung wird präzisiert, wenn man über eine  $k$ -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit integriert.

**Lemma 83.3.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und zu  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{E}^k(M)$  die Menge der  $k$ -Formen auf  $M$ . Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Die  $\mathcal{E}^k(M)$  bilden mit den natürlichen Operationen versehen reelle Vektorräume.*
- (2) *Zu einer Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  und einer Funktion*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*ist auch  $f\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ , wobei  $f\omega$  durch*

$$(f\omega)(P) := f(P)\omega(P)$$

*definiert ist.*

- (3) *Für jede  $C^1$ -differenzierbare Funktion*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*entspricht die Tangentialabbildung  $Tf$  der 1-Differentialform*

$$df : M \longrightarrow T^*M, P \longmapsto T_P f,$$

*wobei der Tangentialraum von  $\mathbb{R}$  in  $f(P)$  mit  $\mathbb{R}$  identifiziert wird. Dies ergibt eine Abbildung*

$$d : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M), f \longmapsto df.$$

(4) Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge ist, so ist bei der Identifizierung  $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$  die Abbildung aus (3) gleich

$$M \longrightarrow M \times (\mathbb{R}^m)^*, P \longmapsto (P, (Df)_P(-)).$$

(5) Die Abbildung  $d$  aus (3) ist  $\mathbb{R}$ -linear.

*Beweis.* (1) und (2) folgen unmittelbar aus einer punkweisen Betrachtung. (3). Für jeden Punkt  $P \in M$  ist

$$T_P f : T_P M \longrightarrow T_{f(P)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

eine nach Lemma 78.10 (2) lineare Abbildung und somit ein Element in  $T_P^* M$ , das wir mit  $(df)_P$  bezeichnen. Die Zuordnung  $P \mapsto (df)_P$  ist daher eine Differentialform. (4) folgt aus Lemma 78.10 (1). (5). Die Abbildung in (3) ist für jeden Punkt  $P \in M$  auf jeder offenen Umgebung festgelegt. Wir können daher annehmen, dass  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Menge ist, so dass die Aussage aus (4) und Proposition 44.5 folgt.  $\square$

Zu einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  hat man die Koordinatenfunktionen

$$x_j : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

zur Verfügung, die sich bei einer gegebenen Karte auf eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit übertragen. In jedem Punkt  $Q \in V$  bilden die  $dx_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , eine Basis des Kotangentialraumes an  $Q$ . Dies ist einfach die Dualbasis der Standardbasis im umgebenden Raum  $\mathbb{R}^n$ , den man auf ganz  $V$  als Tangentialraum nimmt. Zu einer  $k$ -elementigen Teilmenge

$$J = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

setzt man

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

dies ist eine besonders einfache  $k$ -Form auf  $V$ . Für jeden Punkt  $Q \in V$  ist  $dx_J(Q) = (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(Q) = dx_{j_1}(Q) \wedge \dots \wedge dx_{j_k}(Q) = e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*$ .

Die Wirkungsweise von dieser Form auf  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge^k T_Q V$  ist gegeben durch

$$(e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \det(e_{j_i}^*(v_\ell))_{i\ell} = \det((v_\ell)_{j_i})_{i\ell}.$$

Gemäß Satz 81.3 bilden die Auswertungen der Differentialformen (mit  $j_1 < \dots < j_k$ )

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

für jeden Punkt  $Q$  eine Basis von  $\bigwedge^k T_Q^* V$ , und daher lässt sich jede auf  $V$  definierte  $k$ -Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$  eindeutig schreiben als

$$\omega = \sum_{J, \#(J)=k} f_J dx_J$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_J : V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

**Lemma 83.4.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $U \subseteq M$  eine offene Teilmenge mit einer Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Es seien

$$x_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Koordinatenfunktionen,  $1 \leq j \leq n$ . Dann lässt sich jede auf  $U$  definierte  $k$ -Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$  eindeutig schreiben als

$$\omega = \sum_{J, \#(J)=k} f_J dx_J$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_J : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 81.3. □

**Korollar 83.5.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $U \subseteq M$  eine offene Teilmenge mit einer Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Es seien

$$x_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Koordinatenfunktionen,  $1 \leq j \leq n$ . Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gilt für die zugehörige 1-Differentialform  $df$  die Darstellung<sup>11</sup>

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

*Beweis.* Wir können sofort annehmen, dass sich alles auf der offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  abspielt. Für jeden Punkt  $Q \in V$  gilt die folgende Gleichheit von Linearformen

$$\begin{aligned} (df)_Q &= (Df)_Q \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(Q) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(Q) dx_n. \end{aligned}$$

□

<sup>11</sup>Die Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  wurden in der Vorlesung 77 eingeführt.

### 83.2. Das Zurückziehen von Differentialformen.

**Definition 83.6.** Es seien  $L$  und  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $\omega$  eine  $k$ -Differentialform auf  $M$ . Dann nennt man die  $k$ -Form auf  $L$ , die durch

$$(P, v_1, \dots, v_k) \longmapsto \omega(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \dots, T_P(\varphi)(v_k))$$

gegebenen alternierenden Abbildung entspricht, die mit  $\varphi$  zurückgezogene  $k$ -Form. Sie wird mit

$$\varphi^* \omega$$

bezeichnet.

**Lemma 83.7.** Es seien  $L$  und  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Dann erfüllt das Zurückziehen von Differentialformen folgende Eigenschaften.

- (1) Für eine Funktion  $f \in \text{Abb}(M, \mathbb{R}) = \mathcal{E}^0(M)$  ist  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ .
- (2) Die Abbildungen

$$\varphi^* : \mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^k(L), \omega \longmapsto \varphi^* \omega,$$

sind  $\mathbb{R}$ -linear.

- (3) Wenn  $L \subseteq M$  eine offene Untermannigfaltigkeit ist, so ist das Zurückziehen einer Differentialform  $\omega$  einfach die Einschränkung  $\omega|_L$  auf diese Teilmenge.
- (4) Es sei  $N$  eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\psi : M \longrightarrow N$$

eine weitere differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$(\psi \circ \varphi)^*(\omega) = \varphi^*(\psi^*(\omega))$$

für jede Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ .

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition. (2). Wir müssen für Differentialformen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  und Skalare  $a, b \in \mathbb{R}$  zeigen, dass  $\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2) = a\varphi^*\omega_1 + b\varphi^*\omega_2$  gilt. Eine solche Gleichheit von Differentialformen bedeutet, dass die Gleichheit in jedem Punkt  $P \in L$  und für jedes  $k$ -Tupel von Tangentialvektoren  $v_1, \dots, v_k \in T_P L$  gilt. Daher folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} & (\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2))(P, v_1, \dots, v_k) \\ &= (a\omega_1 + b\omega_2)(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \dots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ &= a\omega_1(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \dots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ & \quad + b\omega_2(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \dots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ &= (a\varphi^*\omega_1)(P, v_1, \dots, v_k) + (b\varphi^*\omega_2)(P, v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(3) folgt unmittelbar aus der Definition. (4). Es sei  $Q \in L$ ,  $u_1, \dots, u_k \in T_Q L$  und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $N$ . Dann gilt unter Verwendung von Lemma 78.10 (3)

$$\begin{aligned}
& ((\psi \circ \varphi)^*(\omega))(Q, u_1, \dots, u_k) \\
&= \omega((\psi \circ \varphi)(Q), T_Q(\psi \circ \varphi)(u_1), \dots, T_Q(\psi \circ \varphi)(u_k)) \\
&= \omega(\psi(\varphi(Q)), (T_{\varphi(Q)}\psi)((T_Q\varphi)(u_1)), \dots, (T_{\varphi(Q)}\psi)((T_Q\varphi)(u_k))) \\
&= (\psi^*(\omega))(\varphi(Q), T_Q(\varphi)(u_1), \dots, T_Q(\varphi)(u_k)) \\
&= (\varphi^*(\psi^*(\omega)))(Q, u_1, \dots, u_k),
\end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung.  $\square$

**Lemma 83.8.** *Es seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen, deren Koordinaten mit  $x_1, \dots, x_n$  bzw. mit  $y_1, \dots, y_m$  bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

*eine differenzierbare Abbildung und es sei  $\omega$  eine  $k$ -Differentialform auf  $V$  mit der Darstellung*

$$\omega = \sum_{I, \#(I)=k} f_I dy_I,$$

*wobei  $f_I : V \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind. Dann besitzt die zurückgezogene Form die Darstellung*

$$\begin{aligned}
\varphi^* \omega &= \sum_{I, \#(I)=k} (f_I \circ \varphi) \left( \sum_{J, \#(J)=k} \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) dx_J \right) \\
&= \sum_{J, \#(J)=k} \left( \sum_{I, \#(I)=k} (f_I \circ \varphi) \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) \right) dx_J.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Die zweite Gleichung beruht auf einer einfachen Umordnung. Aufgrund von Lemma 83.7 (2) kann man sich auf den Fall  $\omega = f_I dy_I$  beschränken. Wir setzen  $f = f_I$  und dürfen  $I = \{1, \dots, k\}$  annehmen. Wir zeigen die Gleichheit der beiden  $k$ -Formen auf  $U$ , indem wir zeigen, dass sie für jeden Punkt  $P \in U$  und jedes Dachprodukt  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$  mit  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  den gleichen Wert liefern. Es ist einerseits

$$\begin{aligned}
& \varphi^*(f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k)(P, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) \\
&= (f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k)(\varphi(P), T_P(\varphi)(e_{j_1}) \wedge \dots \wedge T_P(\varphi)(e_{j_k})) \\
&= f(\varphi(P))(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k) \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_1}}(P) \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_k}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_k}}(P) \end{pmatrix} \right) \\
&= f(\varphi(P)) \cdot \det \left( (dy_i) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_\ell}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_\ell}}(P) \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, \ell \leq k}
\end{aligned}$$

$$= f(\varphi(P)) \cdot \det \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_\ell}}(P) \right)_{1 \leq i, \ell \leq k}.$$

Wenn man andererseits die Summe auf  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$  anwendet, so ist  $dx_J(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) = 0$  außer bei  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ , wo sich der Wert 1 ergibt, so dass sich also der gleiche Wert ergibt.  $\square$

**Korollar 83.9.** *Es seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen, deren Koordinaten mit  $x_1, \dots, x_n$  bzw. mit  $y_1, \dots, y_n$  bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

*eine differenzierbare Abbildung und es sei  $\omega$  eine  $n$ -Differentialform auf  $V$  mit der Darstellung*

$$\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

*Dann besitzt die zurückgezogene Form die Darstellung*

$$\varphi^* \omega = (f \circ \varphi) \cdot \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Lemma 83.8.  $\square$

**Korollar 83.10.** *Es seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen, deren Koordinaten mit  $x_1, \dots, x_n$  bzw. mit  $y_1, \dots, y_m$  bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

*eine differenzierbare Abbildung mit  $\varphi_{i_0}$  konstant für ein  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  und es sei  $\omega$  eine  $k$ -Differentialform auf  $V$  mit der Darstellung*

$$\omega = f dy_I$$

*mit  $i_0 \in I$ . Dann ist  $\varphi^* \omega = 0$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 83.8 gilt

$$\varphi^* \omega = \sum_{J, \#(J)=k} (f \circ \varphi) \cdot \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) dx_J.$$

Da  $\frac{\partial \varphi_{i_0}}{\partial x_j} = 0$  ist für alle  $j \in J$ , ist für jedes  $J$  eine Zeile der Matrix 0, so dass die Determinanten stets 0 sind.  $\square$

## 84. VORLESUNG

Wir kommen nun zur Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten. Ausgangspunkt dafür ist, dass auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  eine  $n$ -Form gegeben ist. Bei einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit den Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  entspricht dabei die Integration bezüglich der Form  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  der Integration bezüglich des Lebesgue-Maßes. Bei einer Mannigfaltigkeit muss man die Form und das zugehörige Maß „zusammenkleben“.

### 84.1. Positive Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit.

In der folgenden Definition bezeichnen wir zu einer Karte  $\alpha : U \rightarrow V$  und einer Differentialform  $\omega$  auf  $U$  die nach  $V$  transportierte Differentialform mit  $\alpha_*\omega$ . Das ist dasselbe wie die zurückgezogene Form  $\alpha^{-1*}\omega$ .

**Definition 84.1.** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine messbare  $n$ -Differentialform auf  $M$ . Dann heißt  $\omega$  eine *positive Volumenform*, wenn für jede Karte (eines gegebenen Atlases)

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und Koordinatenfunktionen  $x_1, \dots, x_n$ ) in der lokalen Darstellung der Differentialform

$$\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

die Funktion  $f$  überall positiv ist.<sup>12</sup>

Eine solche positive Volumenform kann es nur geben, wenn die Mannigfaltigkeit orientierbar ist (siehe Lemma 84.5 weiter unten).

**Lemma 84.2.** *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und es sei  $\omega$  eine positive Volumenform auf  $M$ . Es sei  $T \subseteq M$  eine Borelmenge. Zu einer Karte*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $\alpha_*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und einer messbaren Teilmenge  $T \subseteq U$  setzen wir

$$\nu(\alpha, T) = \int_{\alpha(T)} f d\lambda^n$$

Dann gelten folgende Eigenschaften.

- (1) Wenn  $T \subseteq U_1, U_2$  zwei Kartenumgebungen sind, so ist  $\nu(\alpha_1, T) = \nu(\alpha_2, T)$ .
- (2) Es gibt eine abzählbare disjunkte Vereinigung  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  derart, dass jedes  $T_i$  ganz in einer Karte  $U_i$  liegt.
- (3) Die Summe  $\sum_{i \in I} \nu(\alpha_i, T_i)$  ist unabhängig von der gewählten abzählbaren disjunkten Zerlegung in (2).

*Beweis.* (1). Wegen  $T \subseteq U_1 \cap U_2$  können wir  $U = U_1 = U_2$  annehmen (aber mit unterschiedlichen Kartenabbildungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  nach  $V_1$  bzw.  $V_2$ ). Es sei

$$\psi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

<sup>12</sup>Die zur Karte  $U$  gehörenden Funktionen  $f$ , die hier mit der  $n$ -Standardform multipliziert werden, entsprechen den am Ende der 82sten Vorlesung erwähnten Dichten, mit denen ein Maß auf der Mannigfaltigkeit beschrieben werden kann.

der diffeomorphe Kartenwechsel. Dann gelten nach Satz 75.3 und nach Korollar 83.9, und da wir wegen der Positivität die Betragsstriche weglassen können, die Gleichheiten

$$\begin{aligned}
 \nu(\alpha_2, T) &= \int_{\alpha_2(T)} f_2 d\lambda^n \\
 &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) |\det(D\psi)| d\lambda^n \\
 &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) \cdot \det(D\psi) d\lambda^n \\
 &= \int_{\alpha_1(T)} f_1 d\lambda^n \\
 &= \nu(\alpha_1, T).
 \end{aligned}$$

(2). Es sei  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine abzählbarer Atlas. Dann kann man die Mengen  $T_n = T \cap (U_n \setminus \bigcup_{m < n} U_m)$  nehmen. (3). Es seien  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i = \bigsqcup_{j \in J} S_j$  zwei abzählbare disjunkte messbare Zerlegungen, deren Glieder jeweils in Karten enthalten seien. Die Karten seien einerseits  $(U_i, \alpha_i)$  mit den die Form beschreibenden Funktionen  $f_i$  und andererseits  $(V_j, \beta_j)$  mit den die Form beschreibenden Funktionen  $g_j$ . Wir betrachten die ebenfalls abzählbare Zerlegung, die durch die Mengen  $T_i \cap S_j$ ,  $(i, j) \in I \times J$ , gegeben ist. Nach Lemma 71.1 (angewendet auf die einzelnen Kartenbilder) gilt dann unter Verwendung von Teil (1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in I} \left( \int_{\alpha_i(T_i)} f_i d\lambda^n \right) &= \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} \int_{\alpha_i(T_i \cap S_j)} f_i d\lambda^n \right) \\
 &= \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j d\lambda^n \right) \\
 &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j d\lambda^n \right) \\
 &= \sum_{j \in J} \left( \int_{\beta_j(S_j)} g_j d\lambda^n \right).
 \end{aligned}$$

□

**Definition 84.3.** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es sei  $\omega$  eine positive Volumenform auf  $M$ . Dann heißt die für jede Borelmenge  $T \subseteq M$  durch eine abzählbare Zerlegung  $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$  (wobei  $T_i \subseteq U_i$  ein offenes Kartengebiet und  $\alpha_{i*}\omega = f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ist) definierte Zahl

$$\int_T \omega = \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(T)} f_i d\lambda^n$$

(aus  $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ) das Maß von  $T$  zu  $\omega$  oder das Integral von  $\omega$  über  $T$ .

Nach dem vorstehenden Lemma ist dieses Volumenmaß wohldefiniert. Nach Aufgabe 84.2 handelt es sich um ein  $\sigma$ -endliches Maß.

**Lemma 84.4.** *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  positive Volumenformen auf  $M$ . Dann gilt für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq M$  und  $a, b \in \mathbb{R}_+$  die Beziehung*

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 84.4. □

## 84.2. Volumenformen und Orientierung.

Die Existenz einer stetigen nullstellenfreien Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit hängt eng mit ihrer Orientierbarkeit zusammen. Von der folgenden Aussage werden wir in Satz 89.8 auch die Umkehrung beweisen.

**Lemma 84.5.** *Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$ . Dann gibt es einen (diffeomorph-äquivalenten) orientierten Atlas für  $M$  derart, dass  $\omega$  eine positive Volumenform bzgl. diesem Atlas wird. Insbesondere ist  $M$  orientierbar.*

*Beweis.* Zu  $P \in M$  betrachtet man Kartengebiete  $P \in U$  mit der Eigenschaft, dass  $U$  homöomorph zu einem offenen Ball  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  ist. Es ist

$$\bigwedge^m TU \cong \bigwedge^m TV \cong V \times \mathbb{R}$$

mittels  $\bigwedge^m(\alpha)$ . Dabei hängt die hintere Isomorphie von der Wahl einer Basis  $v_1, \dots, v_m$  auf  $\mathbb{R}^m$  mit Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  ab. Es sei  $\omega' = \alpha_\omega$  die zugehörige 1-Differentialform auf  $V$ . Diese Form ist nullstellenfrei, und da  $V$  zusammenhängend ist, ist  $\omega'$  nach dem Zwischenwertsatz positiv oder negativ. Im negativen Fall ersetzen wir die Karte, indem wir ein Basiselement durch sein Negatives ersetzen. Dadurch gewinnen wir für jeden Punkt eine Kartenumgebung, auf der die Form positiv ist. Zu zwei Karten  $\alpha : U \rightarrow V$  und  $\beta : U \rightarrow V'$  mit der Übergangsabbildung  $\psi = \beta \circ \alpha^{-1}$  und den lokalen Beschreibungen  $\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  und  $\beta_*\omega = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$  gilt dann wegen  $\psi^*(\beta_*\omega) = \alpha_*\omega$  nach Korollar 83.9 die Beziehung  $f = g \circ \psi \det(D\psi)$ . Da  $f$  und  $g$  positiv sind, muss auch die Determinante positiv sein, so dass die Übergangsabbildung orientierungstreu und die Mannigfaltigkeit somit orientiert ist. □

**Korollar 84.6.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

(mit  $m = n - \ell \geq 0$ ) eine stetig differenzierbare Abbildung, die in jedem Punkt der Faser  $M$  über  $0 \in \mathbb{R}^\ell$  regulär sei. Dann ist die Abbildung

$$\bigwedge^m T_P M \longrightarrow \mathbb{R}, v_1 \wedge \dots \wedge v_m \longmapsto \det(\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P), v_1, \dots, v_m),$$

in jedem Punkt  $P \in M$  eine Isomorphie, wodurch eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$  gegeben ist.

*Beweis.* Nach Aufgabe 81.12 und nach Korollar 80.7 ist die Abbildung wohldefiniert. Es sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von

$$T_P M = \text{kern}(D\varphi)_P = (\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P))^\perp.$$

Da die Abbildung regulär ist, sind die Gradienten rechts untereinander linear unabhängig, und wegen der Orthogonalitätsbeziehung erst recht linear unabhängig zu den  $v_i$ . Daher liegt insgesamt eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  vor, so dass nach Satz 14.13 die Determinante  $\neq 0$  ist.  $\square$

**Bemerkung 84.7.** In der Situation von Korollar 84.6 erhält man nicht nur eine nullstellenfreie Volumenform, sondern auch eine Orientierung auf jedem Tangentialraum und überhaupt eine orientierte Mannigfaltigkeit. Man definiert die Orientierung auf  $T_P M$  dadurch, dass man festlegt, dass eine Basis  $v_1, \dots, v_m$  die Orientierung repräsentiert, wenn die erweiterte Basis  $\text{grad } \varphi_1(P), \dots, \text{grad } \varphi_\ell(P), v_1, \dots, v_m$  die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  repräsentiert.

**Beispiel 84.8.** Wir betrachten die 2-Sphäre  $S^2$  als Faser über 0 zur differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Wir können darauf Korollar 84.6 anwenden und erhalten durch

$$\bigwedge^2 T_P S^2 \longrightarrow \mathbb{R}, v_1 \wedge v_2 \longmapsto \det(\text{grad } \varphi(P), v_1, v_2)$$

(wobei die Tangentenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  wegen  $T_P S^2 \subseteq T_P \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$  direkt im  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden können), eine stetige nullstellenfreie Volumenform  $\omega$ . Dies führt zu einer positiven Volumenform und zu einer Orientierung auf  $S^2$ . Zwei linear unabhängige Tangentialvektoren  $v_1$  und  $v_2$  repräsentieren die Orientierung, wenn  $\omega(v_1, v_2) > 0$  ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Vektoren  $\text{grad } \varphi(P), v_1, v_2$  die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^3$  repräsentieren.

### 84.3. Integration längs einer differenzierbaren Abbildung.

Auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  sind nur  $n$ -Formen über  $M$  sinnvoll integrierbar. Man möchte aber auch  $k$ -Formen ( $1 \leq k \leq n$ ) über gewisse  $k$ -dimensionale Unterobjekte integrieren können. Das passende Konzept ist dabei die Integration längs einer differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

einer  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $L$ . Dabei integriert man über  $L$  einfach die mit  $\varphi$  zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\omega$  zu einer Form  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ . Auf  $L$  passen dabei die Dimension und der Grad der Form zusammen. Ein wichtiger Spezialfall ist dabei der von 1-Formen und differenzierbaren Kurven

$$\gamma : I \longrightarrow M,$$

die dabei entstehenden Integrale nennt man *Wegintegrale*.

**Definition 84.9.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$  eine 1-Differentialform. Es sei

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) dt$$

das *Wegintegral* von  $\omega$  längs  $\gamma$ .

**Bemerkung 84.10.** Im physikalischen Kontext beschreibt eine 1-Differentialform (bzw. ihre duale Version, ein Vektorfelder) eine Kraft; das Wegintegral ist dann der *Arbeitsaufwand* oder die *Energie*, die gebraucht oder freigesetzt wird, wenn sich ein Teilchen auf dem Weg bewegt.

Häufig werden wir Differentialformen auf einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq G$ ,  $G$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , betrachten, die sogar auf  $G$  definiert sind und daher die Gestalt  $\omega = \sum_{i=1}^n g_i dx_i$  besitzen, wobei die  $x_i$  die Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$  und die  $g_i$  auf  $G$  definierte Funktionen sind. Für einen Weg in  $M$  ist es nach Aufgabe 84.7 gleichgültig, ob man das Wegintegral mit Bezug auf  $G$  und  $\omega$  oder mit Bezug auf  $M$  und die eingeschränkte Differentialform  $\omega|_M$  betrachtet.

**Bemerkung 84.11.** Ein Wegintegral wird folgendermaßen berechnet. Sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, die durch

$$\omega = g_1 dx_1 + \dots + g_n dx_n$$

beschrieben werde, wobei die  $g_j : G \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind. Es sei eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  gegeben mit den (stetig differenzierbaren) Komponentenfunktionen  $\gamma_j$ . Die Ableitung in einem Punkt  $t \in [a, b]$  wird dann nach Lemma 40.4 durch den Vektor  $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  beschrieben. Die zurückgenommene Differentialform  $\gamma^*\omega$  hat dann im Punkt  $t$  in Richtung 1 den Wert

$$\begin{aligned} \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) &= (g_1(\gamma(t))dx_1 + \dots + g_n(\gamma(t))dx_n) \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= g_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + g_n(\gamma(t))\gamma'_n(t). \end{aligned}$$

Im mittleren Ausdruck wird eine Linearform auf einen Vektor angewendet. In  $g_j(x_1, \dots, x_n)$  wird also  $x_i$  durch  $\gamma_i(t)$  und  $dx_i$  wird durch  $\gamma'_i(t)$  ersetzt. Das Gesamtergebnis ist eine stetige Funktion von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$ , die man integrieren kann.

**Beispiel 84.12.** Wir betrachten die Differentialform

$$\omega = (xy + z^2)dx + zdy + x^3dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$  und den affin-linearen Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (1, 2, 0) + t(3, 0, 2) = (1 + 3t, 2, 2t).$$

Die unter  $\gamma$  zurückgenommene Differentialform  $\gamma^*\omega$  ist

$$\begin{aligned} & ((1 + 3t)2 + (2t)^2)dx + 2tdy + (1 + 3t)^3dz \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (3((1 + 3t)2 + (2t)^2) + 2(1 + 3t)^3)dt \\ &= (12t^2 + 18t + 6 + 54t^3 + 54t^2 + 18t + 2)dt \\ &= (54t^3 + 66t^2 + 36t + 8)dt. \end{aligned}$$

Für das Integral über dem Einheitsintervall ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (54t^3 + 66t^2 + 36t + 8) dt \\ &= \left( \frac{27}{2}t^4 + 22t^3 + 18t^2 + 8t \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{123}{2}. \end{aligned}$$

## 85. VORLESUNG

### 85.1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

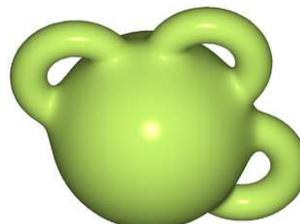


Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Die Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  besitzt den Flächeninhalt  $4\pi r^2$ . Dies ist ein klassisches Resultat, doch wie kann man den Flächeninhalt einer solchen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit präzise erfassen? Um die Maß- und Integrationstheorie der vorhergehenden Vorlesungen anwenden

zu können, brauchen wie eine 2-Form auf der Fläche. Über den Begriff der Riemannschen Metrik werden wir zeigen, dass es auf Flächen, die im dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet sind, ein natürliches Flächenmaß gibt, mit dem man den Flächeninhalt ausrechnen kann.

Die grüne Oberfläche erbt vom umgebenden euklidischen Raum das Skalarprodukt. Dies erlaubt darauf eine sinnvolle Flächenmessung.



**Definition 85.1.** Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *riemannsche Mannigfaltigkeit*, wenn auf jedem Tangentialraum  $T_P M$ ,  $P \in M$ , ein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle_P$  erklärt ist derart, dass für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  die Funktionen (für  $1 \leq i, j \leq n$ )

$$g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}, Q \longmapsto g_{ij}(Q) = \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)},$$

$C^1$ -differenzierbar sind.<sup>13</sup>

Die auf den Karten definierten Funktionen  $g_{ij}$  fasst man zu einer Matrix  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  zusammen, die man auch die *metrischen Fundamentalmatrix* (oder den *metrischen Fundamentaltensor*) nennt. Diese Matrix ist in jedem Punkt  $Q \in V$  symmetrisch und positiv definit. Wichtig ist auch die Determinante davon, also

$$g = \det (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n},$$

die ebenfalls stetig differenzierbar ist und die nach Korollar 47.2 überall positiv ist.

Das einfachste Beispiel einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt (und überhaupt jeder euklidische Raum) sowie eine jede offene Teilmenge davon. Wichtiger ist, dass auch jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer riemannschen Mannigfaltigkeit wieder eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Dadurch ergeben sich viele nichttriviale Beispiele, wie bspw. Flächen im  $\mathbb{R}^3$  wie die Sphäre oder der Torus.

**Satz 85.2.** Sei  $N$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $M \subseteq N$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  ebenfalls eine riemannsche Mannigfaltigkeit.

<sup>13</sup>Viele Autoren fordern, dass eine riemannsche Mannigfaltigkeit und diese Funktionen von der Klasse  $C^\infty$  sind.

*Beweis.* Für jeden Punkt  $P \in M$  ist  $T_P M \subseteq T_P N$  ein Untervektorraum nach Satz 79.3. Daher induziert das Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle_P$  auf  $T_P N$  ein Skalarprodukt auf  $T_P M$ . Für die stetige Differenzierbarkeit des Skalarproduktes sei

$$\theta : W \longrightarrow W'$$

eine Karte von  $N$  mit  $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ , die eine Bijektion  $\alpha$  zwischen  $M \cap W$  und  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \cap W'$  induziere. Unter dieser Identifizierung ist  $T_P M \cong \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$  mit den Basisvektoren  $e_i$ ,  $i \leq m$ . Für Paare  $e_i, e_j$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , von solchen Vektoren gilt dann für  $Q \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap W'$  die Gleichheit

$$\begin{aligned} h_{ij}(Q) &= \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)} \\ &= \langle T(\theta^{-1})(e_i), T(\theta^{-1})(e_j) \rangle_{\theta^{-1}(Q)} \\ &= g_{ij}(Q), \end{aligned}$$

da ja das Skalarprodukt auf  $T_{\alpha^{-1}(Q)} M$  einfach die Einschränkung des Skalarproduktes auf  $T_{\alpha^{-1}(Q)} N$  ist und da  $\alpha$  die Einschränkung von  $\theta$  ist.  $\square$

## 85.2. Vektorfelder und 1-Formen auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit.

Böse Zungen behaupten, dass Physiker nicht den Unterschied zwischen Vektorfeldern und 1-Formen kennen. Auf riemannschen Mannigfaltigkeiten entsprechen sich in der Tat diese Objekte.

**Lemma 85.3.** *Es sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M), F \longmapsto \omega_F,$$

mit

$$(\omega_F(P))(v) := \langle F(P), v \rangle_P,$$

wobei  $P \in M$  ist und  $v$  einen Tangentenvektor aus  $T_P M$  bezeichnet, eine Isomorphie zwischen den Vektorfeldern und den 1-Formen auf  $M$ .

*Beweis.* Für jeden Punkt  $P \in M$  ist die Abbildung

$$T_P M \longrightarrow T_P^* M, u \longmapsto \langle u, - \rangle_P,$$

nach Lemma 46.1 eine Isomorphie. Daraus folgt direkt die globale Aussage.  $\square$

**Bemerkung 85.4.** Auf einem euklidischen Vektorraum entsprechen sich die Vektorfelder und die 1-Differentialformen gemäß Lemma 85.3. Das gleiche gilt für eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , und Differentialformen auf  $\mathbb{R}^n$  lassen sich auf  $M$  einschränken. Daher kann man auch ein Vektorfeld  $F$  auf  $\mathbb{R}^n$  zu einem Vektorfeld auf  $M$  zurückziehen: man betrachtet die zugehörige Differentialform auf  $\mathbb{R}^n$ , die zurückgezogene Differentialform auf  $M$  und dazu das zugehörige Vektorfeld auf  $M$ . Geometrisch gesprochen wird dabei einem Punkt  $P \in M$  aber nicht die Richtung  $F(P)$

zugeordnet, da dieser Vektor im Allgemeinen gar nicht zum Tangentialraum  $T_P M \subseteq T_P \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  gehört. Stattdessen muss man die orthogonale Projektion von  $F(P)$  auf  $T_P M$  nehmen (hierbei wird also die euklidische Struktur verwendet).

**Beispiel 85.5.** Als Beispiel zu Bemerkung 85.4 betrachten wir den Einheitskreis  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und das konstante Vektorfeld  $e_1$  auf  $\mathbb{R}^2$ , das also jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  den ersten Standardvektor als Richtung zuordnet. Die zugehörige Differentialform ist  $dx$ , die  $e_1$  auf 1 und  $e_2$  auf 0 abbildet. Die auf  $S^1$  zurückgezogene Differentialform wird ebenfalls mit  $dx$  bezeichnet und besitzt die gleiche Wirkungsweise, allerdings eingeschränkt auf den jeweiligen Tangentialraum  $T_P S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Das zu dieser Differentialform auf  $S^1$  gehörige Vektorfeld  $H$  berechnet sich nach Lemma 85.3 folgendermaßen: für jeden Punkt  $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^1$  und jeden Vektor  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in T_P M$  muss

$$\langle H(P), v \rangle = dx(P)(v) = v_1$$

gelten, wobei  $H(P) \in T_P M$  sein muss. Der Tangentialraum ist eindimensional und wird von  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  aufgespannt. Daher besitzt  $H$  die Gestalt

$$H(P) = c \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

und aus der Bedingung

$$\langle H(P), v \rangle = \left\langle c \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = cd = -bd$$

folgt direkt  $c = -b$ . Das zurückgezogene Vektorfeld ist demnach

$$H\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = -b \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

### 85.3. Die kanonische Volumenform auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit.

**Definition 85.6.** Es sei  $M$  eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Zu  $P \in M$  sei  $\omega_P$  diejenige alternierende Form auf  $T_P M$  (bzw. das entsprechende Element aus  $\bigwedge^n T_P^* M$ ), die jeder die Orientierung repräsentierenden Orthonormalbasis den Wert 1 zuordnet. Dann heißt die  $n$ -Differentialform

$$M \longrightarrow \bigwedge^n T^* M, P \longmapsto \omega_P,$$

die *kanonische Volumenform* auf  $M$ .

Das zugehörige Maß zu dieser positiven Form heißt *kanonisches Maß* auf  $M$ . Wir bezeichnen es mit  $\lambda_M$ . Demnach ist  $\lambda_M(M)$  das Gesamtmaß (der Flächeninhalt, das Volumen) von  $M$ .

**Lemma 85.7.** *Es sei  $M$  eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\omega$  die kanonische Volumenform. Es sei*

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

*eine orientierte Karte mit der metrischen Fundamentalmatrix  $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  und  $g = \det G$ . Es sei  $T \subseteq U$  eine messbare Teilmenge. Dann ist*

$$\int_T \omega = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} d\lambda^n.$$

*Beweis.* Gemäß der Definition müssen wir die Differentialform  $(\alpha^{-1})^* \omega$  für jeden Punkt  $Q \in V$  berechnen. Diese Form besitzt die Gestalt  $c_Q dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und ist durch ihren Wert auf  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  festgelegt. Es ist

$$\begin{aligned} & (\alpha^{-1})^* \omega(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \omega(T_Q(\alpha^{-1})(e_1) \wedge \dots \wedge T_Q(\alpha^{-1})(e_n)). \end{aligned}$$

Nach Definition der metrischen Fundamentalmatrix ist

$$g_{ij}(Q) = \langle T_Q(\alpha^{-1})(e_i), T_Q(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)}.$$

Nach Satz 68.8 ist

$$\begin{aligned} & \omega(T_Q(\alpha^{-1})(e_1) \wedge \dots \wedge T_Q(\alpha^{-1})(e_n)) \\ &= (\det (\langle T_Q(\alpha^{-1})(e_i), T_Q(\alpha^{-1})(e_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n})^{1/2} \\ &= \sqrt{g(Q)}. \end{aligned}$$

□

**Satz 85.8.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und sei  $M \subseteq G$  eine  $n$ -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, die orientiert und mit der induzierten riemannschen Struktur und der kanonischen Volumenform  $\omega$  versehen sei. Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und es sei*

$$\varphi : W \longrightarrow U$$

*ein Diffeomorphismus mit der offenen Menge  $U \subseteq M$ .<sup>14</sup> Dann ist  $\varphi^{-1}$  eine Karte von  $M$ , und auf  $W$  gilt*

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega|_U) &= \left( \det \left( \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} \right\rangle_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( \det \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Man sagt auch, dass  $\varphi$  eine (diffeomorphe) *Parametrisierung* von  $U$  ist.

*Beweis.* Die zweite Gleichung ergibt sich einfach durch Auswertung des Standardskalarproduktes auf dem  $\mathbb{R}^m$ . Nach Definition der metrischen Fundamentalmatrix ist für  $Q \in W$

$$\begin{aligned} g_{ij}(Q) &= \langle T_Q(\varphi)(e_i), T_Q(\varphi)(e_j) \rangle_{\varphi(Q)} \\ &= \langle T_Q(\varphi)(e_i), T_Q(\varphi)(e_j) \rangle \\ &= \langle (D\varphi)_Q(e_i), (D\varphi)_Q(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(Q) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(Q) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(Q) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(Q) \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

da ja der Tangentialraum  $T_{\varphi(Q)}M$  das induzierte Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^m$  trägt, da die Tangentialabbildung im lokalen Fall das totale Differential ist und da man dessen Einträge mit den partiellen Ableitungen ausdrücken kann. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 85.7.  $\square$

**Beispiel 85.9.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine reguläre differenzierbare Kurve, es sei also überall  $\varphi'(t) \neq 0$ . Ferner sei angenommen, dass  $\varphi$  injektiv und dass das Bild  $M = \varphi(I)$  von  $I$  eine eindimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  ist. Dann gilt nach Satz 85.8 für die kanonische Form  $\omega$  von  $M$  (bzw. das kanonische Maß, das in diesem Fall ein Längenmaß ist) die Beziehung

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \left\langle \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_m(t) \end{pmatrix} \right\rangle^{1/2} dt \\ &= \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2} dt \\ &= \|\varphi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Somit gilt bei  $I = ]a, b[$  für das Maß (also die Länge) von  $M$  die Formel

$$\lambda_M(M) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2} dt.$$

Dies stimmt mit der in Satz 41.6 über die Theorie der rektifizierbaren Kurven erzielten Formel überein.

## 86. VORLESUNG

In dieser Vorlesung setzen wir die Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten fort und berechnen insbesondere einige Flächeninhalte.

## 86.1. Berechnungen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten.

**Korollar 86.1.** *Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion. Es sei*

$$M = \{(x_1, \dots, x_n, \psi(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in W\} \subset W \times \mathbb{R}$$

*der Graph von  $\psi$ . Dann ist  $M$  eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit, und für die kanonische Volumenform  $\omega$  auf  $M$  gilt*

$$(\text{Id} \times \psi)^*(\omega) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

*Beweis.* Die Abbildung

$$\varphi = \text{id} \times \psi : W \longrightarrow W \times \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x, \psi(x)),$$

ist ein Homöomorphismus zwischen  $W$  und dem Graphen  $M$ . Der Graph ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $W \times \mathbb{R}$  und trägt daher die induzierte riemannsche Struktur und (da sich die Orientierung von  $W$  auf  $M$  überträgt) eine kanonische Volumenform  $\omega$ . Auf diese Situation kann man Satz 85.8 anwenden. Die partiellen Ableitungen von  $\varphi$  nach der  $i$ -ten Variablen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Sei  $Q \in W$  ein Punkt, den wir in die Funktionen im Folgenden einsetzen, so dass wir überall mit reellen Zahlen rechnen. Die Skalarprodukte, die die Einträge  $b_{ij}$  der Matrix  $B$  bilden (von deren Determinante wir die Wurzel berechnen müssen), sind gleich

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(Q) \right\rangle = \begin{cases} 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q)\right)^2 & \text{bei } i = j \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(Q) & \text{bei } i \neq j. \end{cases}$$

Es ist also  $B = E_n + A$  mit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Mit  $c_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q)$  können wir  $a_{ij} = c_i c_j$  und insgesamt die Matrix  $A$  als

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_1, \dots, c_n)$$

schreiben. Daher beschreibt  $A$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die durch  $\mathbb{R}$  faktorisiert, und besitzt damit einen Kern, der zumindest  $(n-1)$ -dimensional ist. Nennen wir ihn  $K$ . Wenn er die Dimension  $n$  besitzt, so ist  $A = 0$  und  $B$  ist die Identität, und die Aussage ist richtig. Sei also  $A \neq 0$ .

Dann ist  $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$ .

Dieser Vektor ist ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $1 + c_1^2 + \dots + c_n^2$  und  $K$  bildet den  $(n-1)$ -dimensionalen Eigenraum für  $B$  zum Eigenwert 1. Insgesamt ist  $B$  diagonalisierbar und ihre Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also gleich  $1 + c_1^2 + \dots + c_n^2$ .  $\square$

**Korollar 86.2.** *Es sei  $M \subseteq G$  eine abgeschlossene Fläche<sup>15</sup> in einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^3$ , die mit der induzierten riemannschen Struktur und der kanonischen Flächenform  $\omega$  versehen sei. Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und es sei*

$$\varphi : W \longrightarrow U$$

ein Diffeomorphismus mit der offenen Menge  $U \subseteq M$ . Die Koordinaten von  $\mathbb{R}^2$  seien  $u$  und  $v$  und wir setzen<sup>16</sup>

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \right\rangle, F = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } G = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dann gilt auf  $W$

$$\varphi^*(\omega|_U) = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 85.8.  $\square$

**Bemerkung 86.3.** Wir knüpfen an die Bezeichnungen von Korollar 86.2 an. Wenn die durch  $W$  und  $\varphi$  erfasste offene Teilmenge  $U \subseteq M$  die Eigenschaft besitzt, dass ihr Komplement  $M \setminus U$  eine Nullmenge bzgl. dem kanonischen Maß auf  $M$  ist, so lässt sich der Flächeninhalt von  $M$  allein mittels der Formel für  $\varphi^*(\omega|_U)$  berechnen. Dies ist z.B. der Fall, wenn  $M \setminus U$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $\leq 1$  ist, siehe Aufgabe 84.11. Nullmengen werden bei Berechnungen häufig stillschweigend ignoriert.

## 86.2. Rotationsflächen.

Es sei eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (x(t), y(t)),$$

mit  $y(t) \geq 0$  gegeben. Wir interessieren uns für die zugehörige Rotationsfläche, also die Teilmenge

$$\{(x(t), y(t) \cos \alpha, y(t) \sin \alpha) \mid t \in [a, b], \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

<sup>15</sup>Eine Fläche ist einfach eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

<sup>16</sup>Diese Notation wurde schon von Carl Friedrich Gauß verwendet.

des  $\mathbb{R}^3$ , die entsteht, wenn man die Trajektorie der Kurve um die  $x$ -Achse dreht. Wir setzen zusätzlich voraus, dass  $\gamma$  einen Diffeomorphismus auf sein Bild  $M = \gamma(]a, b[)$  bewirkt und dass  $M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  ist (es wird also gefordert, dass  $\gamma$  überall positiv ist). Die Rotationsfläche ist dann eine zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ohne die  $x$ -Achse, so dass eine riemannsche Mannigfaltigkeit vorliegt. Ihr Flächeninhalt lässt sich wie folgt berechnen.

**Satz 86.4.** *Es sei*

$$\gamma : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (x(t), y(t)),$$

eine differenzierbare Kurve mit  $y(t) > 0$ , die einen Diffeomorphismus zu  $M = \gamma(I)$  induziert, wobei  $M \subseteq G$  eine eindimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  sei. Dann ist die zugehörige Rotationsfläche eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  ohne die  $x$ -Achse, und ihr Flächeninhalt ist gleich

$$2\pi \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t) dt.$$

*Beweis.* Es sei  $S$  die Rotationsfläche, die eine abgeschlossene zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^3$  ist. Wir wenden Korollar 86.2 auf die Parametrisierung

$$]a, b[ \times ]0, 2\pi[ \longrightarrow S, (t, \alpha) \longmapsto (x(t), y(t) \cos \alpha, y(t) \sin \alpha),$$

an. Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \cos \alpha \\ y'(t) \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -y(t) \sin \alpha \\ y(t) \cos \alpha \end{pmatrix}$$

und daher ist

$$E(t, \alpha) = (x'(t))^2 + (y'(t))^2, F(t, \alpha) = 0, G(t, \alpha) = (y(t))^2.$$

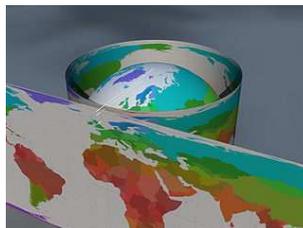
Somit ist der Flächeninhalt gleich

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t) d\alpha dt \\ &= 2\pi \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t) dt. \end{aligned}$$

□

### 86.3. Kartographie.

Die (abstrakte) Kartographie beschäftigt sich mit Karten für die Oberfläche einer Kugel.



**Beispiel 86.5.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (\sqrt{1-v^2} \cos u, \sqrt{1-v^2} \sin u, v),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* liegt. Diese Abbildung kann man sich so vorstellen, dass zuerst das Rechteck zu einer Zylinderoberfläche gemacht wird und anschließend die Kreise des Zylinders auf die horizontalen Kreise einer Kugel mit derselben Höhe projiziert werden. Diese Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-v^2} \sin u \\ \sqrt{1-v^2} \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \cos u \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf das offene Rechteck ist injektiv, ihr Bild ist die Einheitssphäre bis auf einen einzigen halben Längskreis. Man kann mit diesen Koordinaten also die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 86.2 verwendeten Notation ist

$$E = (1-v^2) \sin^2 u + (1-v^2) \cos^2 u = 1-v^2,$$

$$F = v \sin u \cos u - v \sin u \cos u = 0$$

und

$$G = \frac{v^2}{1-v^2} \cos^2 u + \frac{v^2}{1-v^2} \sin^2 u + 1 = \frac{v^2}{1-v^2} + 1 = \frac{1}{1-v^2}.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG - F^2} = 1,$$

d.h. diese Kartenabbildung ist *flächentreu*, und somit ist die Kugeloberfläche gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_{]-1,1[ \times ]0,2\pi[} 1 du \wedge dv \\ &= \int_{[-1,1] \times [0,2\pi]} 1 d\lambda^2 \\ &= 2 \cdot 2\pi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

**Beispiel 86.6.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (\cos u, \sin u, v),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* liegt. Diese Abbildung kann man sich so vorstellen, dass zuerst das (in eine Richtung unbeschränkte) Rechteck  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  zu einem unendlichen Zylindermantel über dem Einheitskreis gemacht wird und anschließend jeder Punkt dieses Zylindermantels über die Verbindungsgerade mit dem Kugelmittelpunkt auf die Kugel projiziert wird. Unter dieser Abbildung werden mit der Ausnahme des Nord- und des Südpols alle Punkte der Kugeloberfläche erreicht. Ferner ist sie injektiv, wenn man die Randpunkte des Intervalls herausnimmt (dann fehlt ein halber Längenskreis im Bild). Die Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin u}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{-v \cos u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \frac{-v \sin u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \frac{\sqrt{1+v^2} - v^2(1+v^2)^{-1/2}}{1+v^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3} \begin{pmatrix} -v \cos u \\ -v \sin u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man kann mit diesen Koordinaten die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 86.2 verwendeten Notation ist

$$E = \frac{1}{1+v^2},$$

$$F = 0$$

und

$$G = \frac{1}{(1+v^2)^3} (v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u + 1) = \frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\frac{1}{(1+v^2)^3}} = \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3}.$$

Die Kugeloberfläche ist nach Satz 73.10 gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_{]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}} \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3} du \wedge dv \\ &= \int_{]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}} \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3} d\lambda^2 \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3} dv. \end{aligned}$$

Das Integral ist nach Beispiel gleich 2, so dass sich der Flächeninhalt  $4\pi$  ergibt.

Die *Mercator-Projektion* geht von der zuletzt genannten Projektion aus, ersetzt aber das unbeschränkte Intervall  $\mathbb{R}$  über eine Diffeomorphie durch ein beschränktes Intervall, so dass eine winkeltreue Karte entsteht.

**Beispiel 86.7.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* landet. Geographisch gesprochen gibt  $u$  den *Breitenkreis* und  $v$  den *Längenkreis* des entsprechenden Punktes auf der Einheitserde an (in *geozentrischen Koordinaten*; die in der Geographie verwendeten Koordinaten weichen davon leicht ab, da die Erde nicht wirklich eine Kugel ist). Diese Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf das offene Rechteck

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] -\pi, \pi[$$

ist injektiv, ihr Bild ist die Einheitskugel bis auf einen einzigen Längenkreis. Man kann mit diesen Koordinaten also die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 86.2 verwendeten Notation ist

$$E = \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1,$$

$$F = \sin u \cos u \sin v \cos v - \sin u \cos u \sin v \cos v = 0$$

und

$$G = \cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 \cdot \cos^2 u} = \cos u.$$

Somit ist die Kugeloberfläche nach dem Satz von Fubini gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] -\pi, \pi[} \cos u \, du \wedge dv \\ &= \int_{\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[ -\pi, \pi \right]} \cos u \, d\lambda^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

## 87. VORLESUNG

### 87.1. Die äußere Ableitung.

In dieser Vorlesung werden wir ein neuartiges mathematisches Objekt kennenlernen, die sogenannte äußere Ableitung. Es handelt sich dabei um einen Ableitungsbegriff, der aus Differentialformen vom Grad  $k$  Differentialformen

von Grad  $k+1$  macht. Für eine Differentialform vom Grad 0, also eine Funktion  $f$ , ist die zugehörige äußere Ableitung einfach die 1-Form  $df$ , also die Differentialform, die jedem Punkt  $P$  (bei einem euklidischen Raum) das totale Differential

$$(Df)_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bzw. (bei einer Mannigfaltigkeit  $M$ ) die Tangentialabbildung

$$T_P(f) : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$$

zuordnet.

In der eindimensionalen Differentialrechnung sind Funktionen und ihre Ableitungen bzw. Stammfunktionen gleichartige Objekte (dies gilt auch noch für differenzierbare Kurven), aber schon bei der Einführung des totalen Differentials zu einer Funktion in mehreren Variablen war die Ableitung ein fundamental anderes Objekt als die Funktion. Zwar können entlang vorgegebener Richtungen höhere Richtungsableitungen definiert werden, die selbst wieder Funktionen sind, doch erfassen diese jeweils nur einen Teilaspekt der Ableitung der Funktion, während das totale Differential die volle Information enthält.

Mit diesem wesentlichen Unterschied von Funktion und Ableitung hängt auch zusammen, dass wir uns im Höherdimensionalen noch nicht mit der umgekehrten Frage beschäftigt haben, welche Ableitungen eine Stammfunktion besitzen. Eine Funktion in mehreren Variablen kann keine Stammfunktion besitzen, nur für eine 1-Differentialform ist dies eine sinnvolle Fragestellung. Der Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der Richtungsableitungen stellt dabei schon ein wichtiges notwendiges Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion zu einer 1-Differentialform dar.

Mit der Theorie der äußeren Ableitungen findet die Frage nach Stammfunktionen bzw. Stammformen ihren natürlichen Rahmen. Darüber hinaus erlaubt sie, den Satz von Stokes prägnant zu formulieren. Ferner können mit der äußeren Ableitung wesentliche topologische Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit charakterisiert werden, was allerdings weit über diese Vorlesung hinausgeht.

**Definition 87.1.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und es sei  $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Differentialform mit der Darstellung

$$\omega = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(I)=k} f_I dx_I$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen

$$f_I : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann nennt man die  $(k+1)$ -Form

$$d\omega = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(I)=k} df_I \wedge dx_I = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(I)=k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I$$

die *äußere Ableitung* von  $\omega$ .

Manchmal spricht man genauer von der  $k$ -ten äußeren Ableitung. Der Differenzierbarkeitsgrad der Differentialform senkt sich dabei um 1, wie man an den Koeffizientenfunktionen direkt ablesen kann.

Die äußere Ableitung ist für  $k = 0, \dots, n$  interessant, ab  $k \geq n$  handelt es sich um die Nullabbildung. Wenn man sich auf glatte Differentialformen beschränkt, so ergibt sich insgesamt eine Folge von äußeren Ableitungen, nämlich

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \mathcal{E}_\infty^0(U) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_\infty^1(U) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_\infty^2(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_\infty^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_\infty^n(U) \xrightarrow{d} 0$$

An der ersten Stelle steht hier einfach die Ableitung einer Funktion (die einzige Indexmenge mit null Elementen ist die leere Menge), also die Zuordnung  $f \mapsto df$ .

Die wichtigsten Eigenschaften der äußeren Ableitung fassen wir wie folgt zusammen.

**Lemma 87.2.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \mathbb{N}$  und es sei*

$$d : \mathcal{E}_1^k(U) \longrightarrow \mathcal{E}_0^{k+1}(U), \omega \longmapsto d\omega,$$

*die äußere Ableitung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die äußere Ableitung*

$$d : \mathcal{E}_1^0(U) \longrightarrow \mathcal{E}_0^1(U),$$

*ist das totale Differential.*

(2) *Die äußere Ableitung ist  $\mathbb{R}$ -linear.*

(3) *Für  $\omega \in \mathcal{E}_1^k(U)$  und  $\tau \in \mathcal{E}_1^\ell(U)$  gilt die Produktregel*

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (d\tau).$$

(4) *Für jede zweimal stetig differenzierbare Differentialform  $\omega$  ist  $d(d\omega) = 0$ .*

(5) *Für eine stetig differenzierbare Abbildung (mit  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  offen.)*

$$\psi : W \longrightarrow U$$

*und jedes  $\omega \in \mathcal{E}_1^k(U)$  gilt für die zurückgezogenen Differentialformen*

$$d(\psi^*\omega) = \psi^*(d\omega).$$

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition (die leere Menge ist die einzige relevante Indexmenge). (2). Die Linearität folgt direkt aus der Definition, der Linearität des totalen Differentials und der Multilinearität des äußeren Produktes.

(3). Es seien  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$ . Wegen der Linearität von  $d$  und der Multilinearität des Dachprodukts können wir die beiden Differentialformen als  $\omega = f dx_I$  und  $\tau = g dx_J$  mit Indexmengen  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  und  $J = \{j_1, \dots, j_\ell\}$  schreiben. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \tau) &= d(f dx_I \wedge g dx_J) \\
 &= d((fg) dx_I \wedge dx_J) \\
 &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial fg}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I \wedge dx_J \\
 &= \sum_{s=1}^n \left( g \frac{\partial f}{\partial x_s} + f \frac{\partial g}{\partial x_s} \right) dx_s \wedge dx_I \wedge dx_J \\
 &= \sum_{s=1}^n g \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{s=1}^n f \frac{\partial g}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I \wedge dx_J \\
 &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I \wedge g dx_J + \sum_{s=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_s} dx_s \wedge f dx_I \wedge dx_J \\
 &= d(f dx_I) \wedge g dx_J + \sum_{s=1}^n (-1)^k f dx_I \wedge \frac{\partial g}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_J \\
 &= d(f dx_I) \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge d(g dx_J).
 \end{aligned}$$

(4). Für eine 1-Form  $\omega = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  ist unter Verwendung von  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \sum_{j=1}^n d(g_j dx_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.
 \end{aligned}$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$  ist  $df = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  mit den partiellen Ableitungen  $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , und daher ist  $d(df) = 0$  nach dem Satz von Schwarz. Für eine Differentialform vom Grad  $k$  setzen wir  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  an und erhalten

$$d(d\omega) = d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}).$$

Nach der Produktregel (3) ist dieser Ausdruck eine Summe von  $k+1$  Dachprodukten, bei denen jeweils ein „Dachfaktor“ die Form  $d(dg) = 0$  besitzt.

(5). Wir schreiben  $\psi_i = x_i \circ \psi$ . Wegen der Linearität der äußeren Ableitung (2) und der Linearität des Zurückziehens von Differentialformen kann man  $\omega = f dx_I$  mit  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  ansetzen. Da das Zurückziehen nach Aufgabe 83.13 mit dem Dachprodukt verträglich ist, gilt unter Verwendung der

Produktregel (3), der Regel (4) und der Kettenregel

$$\begin{aligned}
d(\psi^*\omega) &= d(\psi^*(f \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) \\
&= d(\psi^*(f)) \wedge \psi^*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \psi^*(dx_{i_k}) \\
&= d(\psi^*(f)) \wedge d\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{i_k} \\
&= d(\psi^*(f)) \wedge (d\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{i_k}) + (\psi^*(f)) \wedge d(d\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{i_k}) \\
&= d(\psi^*(f)) \wedge (d\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{i_k}) \\
&= \psi^*(df) \wedge d\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{i_k} \\
&= \psi^*(df) \wedge \psi^*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \psi^*(dx_{i_k}) \\
&= \psi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}).
\end{aligned}$$

□

**Definition 87.3.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert man zu einer differenzierbaren Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}_1^k(M)$  die *äußere Ableitung*  $d\omega \in \mathcal{E}_0^{k+1}(M)$  unter Bezugnahme auf den lokalen Fall und Karten

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

( $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen) durch

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U) = \alpha^*(d(\alpha^{-1})^*(\omega|_U)).$$

Man zieht also die auf  $U$  eingeschränkte Differentialform nach  $V$  zurück, nimmt dort die äußere Ableitung gemäß den lokalen Vorschriften und zieht das Ergebnis nach  $U$  zurück. Man muss sich klar machen, dass dies eine wohldefinierte Differentialform auf  $M$  ergibt, dass es also zu einem Punkt  $P \in M$  egal ist, unter Bezug auf welche Kartenumgebung die äußere Ableitung gebildet wird. Seien also zwei Karten für  $P$  gegeben, wobei wir gleich annehmen dürfen, dass ihr Definitionsbereich gleich  $U$  ist. Die Karten seien

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

und

$$\beta : U \longrightarrow W$$

und wir setzen  $\tau = \omega|_U$ . Dann ergibt sich, wobei wir Lemma 87.2(5) auf  $\alpha \circ \beta^{-1}$  und  $\alpha^{-1*}\tau$  anwenden,

$$\begin{aligned}
\beta^*(d(\beta^{-1})^*(\tau)) &= (\beta \circ \alpha^{-1} \circ \alpha)^*(d((\alpha^{-1} \circ \alpha \circ \beta^{-1})^*\tau)) \\
&= \alpha^*(\beta \circ \alpha^{-1})^*(d((\alpha \circ \beta^{-1})^*(\alpha^{-1})^*\tau)) \\
&= \alpha^*(d(\alpha^{-1})^*(\tau)).
\end{aligned}$$

Auch die grundlegenden Eigenschaften von oben übertragen sich auf Mannigfaltigkeiten.

**Satz 87.4.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $k \in \mathbb{N}$  und es sei

$$d : \mathcal{E}_1^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}_0^{k+1}(M), \omega \longmapsto d\omega,$$

die *äußere Ableitung*. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) Die äußere Ableitung

$$d : \mathcal{E}_1^0(M) \longrightarrow \mathcal{E}_0^1(M),$$

ist die Tangentialabbildung.

(2) Die äußere Ableitung ist  $\mathbb{R}$ -linear.

(3) Für  $\omega \in \mathcal{E}_1^k(M)$  und  $\tau \in \mathcal{E}_1^\ell(M)$  gilt die Produktregel

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau.$$

(4) Für jede zweimal stetig differenzierbare Differentialform  $\omega$  ist  $d(d\omega) = 0$ .

(5) Es sei  $L$  eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : L \longrightarrow M$$

und jedes  $\omega \in \mathcal{E}_1^k(M)$  gilt für die zurückgezogenen Differentialformen

$$d(\psi^*\omega) = \psi^*(d\omega).$$

*Beweis.* Dies sind alles lokale Aussagen, so dass sie sich aus Lemma 87.2 ergeben.  $\square$

**Definition 87.5.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Differentialform  $\omega$  auf  $M$  heißt *geschlossen*, wenn ihre äußere Ableitung  $d\omega = 0$  ist.

**Definition 87.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine  $k$ -Differentialform  $\omega$  auf  $M$  heißt *exakt*, wenn es eine differenzierbare  $(k-1)$ -Differentialform  $\sigma$  auf  $M$  mit  $d\sigma = \omega$  gibt.

Eine exakte Differentialform ist also eine Differentialform, für die es eine *Stammform*  $\sigma$  gibt. Mit diesen Begriffen kann man die obige Aussage  $dd = 0$  so formulieren, dass jede exakte Form geschlossen ist. Die Geschlossenheit ist also eine notwendige Bedingung dafür, dass es eine Stammform geben kann. Es sei hier ohne Beweis bemerkt, dass dieses notwendige Kriterium für den  $\mathbb{R}^n$  auch hinreichend ist. Diese Äquivalenz gilt aber keineswegs auf jeder Mannigfaltigkeit.

## 87.2. Euklidische Halbräume.

**Definition 87.7.** Unter dem *euklidischen Halbraum* der *Dimension*  $n$  versteht man die Menge

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$$

mit der induzierten Topologie.

Bei  $n = 0$  ist dies ein Punkt, bei  $n = 1$  ist dies das Intervall  $[0, \infty]$ , bei  $n = 2$  handelt es sich um eine *Halbebene*, und bei  $n = 3$  um einen Halbraum. Wenn man statt 1 einen anderen Koordinatenindex oder „ $\leq$ “ statt „ $\geq$ “ nimmt, so nennt man auch diese Objekte Halbräume. Da ein Halbraum  $H$  abgeschlossen im  $\mathbb{R}^n$  ist, ist eine Teilmenge  $T \subseteq H$  genau dann abgeschlossen in  $H$ , wenn sie abgeschlossen im  $\mathbb{R}^n$  ist. Diese Äquivalenz gilt *nicht* für offene Mengen. Bspw. ist der Gesamttraum  $H$  in  $H$  offen, aber nicht im  $\mathbb{R}^n$ . Die Menge

$$\partial H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

gehört zu  $H$  und heißt der *Rand* von  $H$ . Er ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^{n-1}$  (was bei  $n = 0$  als leer zu interpretieren ist). Mit  $H_+$  bezeichnet man die positive Hälfte, also  $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ , die eine offene Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$  ist.

Die Halbräume bilden die Standardmodelle für die Mannigfaltigkeiten mit Rand, die wir jetzt einführen wollen. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des Mannigfaltigkeitsbegriffes. Ein typisches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist die abgeschlossene Vollkugel; ihr Rand ist die Sphäre. Ein Punkt im Innern der Kugel besitzt eine kleinere offene Kugelumgebung, in einem solchen Punkt sieht es also „lokal“ so aus wie im  $\mathbb{R}^3$ . Ein Punkt auf dem Rand der Kugel besitzt nicht eine solche Umgebung, sondern in jeder offenen Umgebung davon ist der Rand gegenwärtig; ein solcher Randpunkt sieht lokal wie ein Halbraum aus.

Die Karten einer Mannigfaltigkeit mit Rand werden offene Mengen in einem Halbraum sein. Für die Übergangsabbildungen müssen wir daher von differenzierbaren Abbildungen, die auf Halbräumen definiert sind, sprechen können. Dies ermöglicht die folgende Definition.

**Definition 87.8.** Es sei  $U \subseteq H$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Halbraum  $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $P \in U$  sei ein Punkt und es sei

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *differenzierbar* in  $P$ , wenn es eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

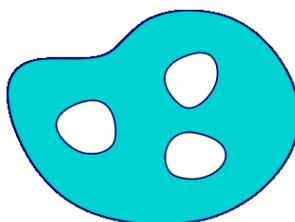
mit  $\tilde{\varphi}|_{U \cap V} = \varphi|_{U \cap V}$  gibt, die in  $P$  differenzierbar ist

Der neue Differenzierbarkeitsbegriff wird also auf den alten zurückgeführt. Für eine offene Menge  $U \subseteq H$ , die den Rand von  $H$  nicht trifft, ist dies gleichbedeutend mit der Definition für eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ .

Mit dieser Strategie, Begriffe für Randpunkte über die Existenz von offenen Umgebungen mit fortgesetzten Objekten zu definieren, übertragen sich viele wichtige Konzepte auf die neue allgemeinere Situation, was wir nicht immer im Einzelnen ausführen werden. Bspw. ist klar, was ein *Diffeomorphismus* von offenen Mengen im Halbraum und was das totale Differential einer differenzierbaren Abbildung ist. Auch die Definition einer Mannigfaltigkeit mit Rang ist vor diesem Hintergrund nicht überraschend.

## 88. VORLESUNG

### 88.1. Mannigfaltigkeiten mit Rand.



Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand besteht aus den vier geschlossenen Bögen.

**Definition 88.1.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \overline{\mathbb{N}}_+$ . Ein topologischer Hausdorff-Raum  $M$  zusammen mit einer offenen Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  und Karten

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i,$$

wobei die  $V_i \subseteq H \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen im euklidischen Halbraum der Dimension  $n$  sind, und mit der Eigenschaft, dass die Übergangsabbildungen

$$\alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$

$C^k$ -Diffeomorphismen sind, heißt  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Rand oder differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand (vom Grad  $k$ ), oder *berandete Mannigfaltigkeit*. Die Menge der Karten  $(U_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$ , nennt man auch den  $C^k$ -Atlas der berandeten Mannigfaltigkeit.

Da auch offene Mengen im Halbraum zugelassen sind, die den Rand gar nicht treffen, umfasst dieser Begriff den der differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Bei einer Mannigfaltigkeit mit Rand kann der Rand (den wir gleich in naheliegender Weise definieren) auch leer sein. Dies ist genau bei den „gewöhnlichen“ differenzierbaren Mannigfaltigkeiten der Fall.

**Definition 88.2.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist der *Rand* von  $M$ , geschrieben  $\partial M$ , definiert als

$$\partial M = \{x \in M \mid \alpha_i(x) \in \partial H \cap V_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

Dabei kann man auf jeder Karte testen, ob ein gegebener Punkt ein Randpunkt ist.

**Lemma 88.3.** *Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Ein Punkt  $P \in M$  ist genau dann ein Randpunkt, wenn dies für jede Karte gilt.*
- (2) *Der Rand  $\partial M$  ist abgeschlossen.*
- (3) *Das Komplement  $M \setminus \partial M$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand).*

*Beweis.* (1). Es sei  $P \in M$  und  $P \in U$  ein Kartengebiet mit zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

mit  $V_1 \subseteq H_1$  und  $V_2 \subseteq H_2$  offen in euklidischen Halbräumen  $H_1, H_2 \cong \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Die Kartenwechselabbildung  $\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  ist ein Diffeomorphismus, und das heißt für jeden Punkt  $Q \in V_1$ , dass es offene Umgebungen  $W_1$  und  $W_2$  in  $\mathbb{R}^n$  gibt mit  $Q \in W_1$  und eine diffeomorphe Ausdehnung

$$\tilde{\varphi} : W_1 \longrightarrow W_2$$

von  $\varphi|_{W_1 \cap H_1}$ . Daher ist  $\tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1)$  offen in  $W_2$ .

Sei nun  $Q_1 = \alpha_1(P)$  und  $W_1, W_2, \tilde{\varphi}$  mit den eben erwähnten Eigenschaften gewählt. Wenn  $Q_1$  kein Randpunkt in der ersten Karte ist, so ist  $Q_1 \in H_1^+ \cap W_1$  eine offene Umgebung und damit ist  $\alpha_2(P) \in \tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1)$  eine offene Umgebung in  $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ferner ist  $\tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1) \subseteq H_2$ . D.h.  $\alpha_2(P) \in H_2$  besitzt eine in  $\mathbb{R}^n$  offene Umgebung innerhalb von  $H_2$  und kann daher auch in der zweiten Karte kein Randpunkt sein. (2). Sei  $P \notin \partial M$  und sei  $P \in U$  ein Kartengebiet mit dem Homöomorphismus

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} = H$  offen. Da  $P$  kein Randpunkt ist, ist die erste Komponente von  $\alpha(P)$  positiv und daher gibt es eine offene Menge  $\alpha(P) \in V' \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = H_+$ . Daher ist  $U' = \alpha^{-1}(V')$  eine offene Umgebung von  $P$ , die den Rand nicht trifft. (3). Für jeden Punkt  $P \notin \partial M$  kann man wie in (2) ein Kartengebiet angeben, das disjunkt zum Rand ist und dessen Kartenbild eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$  ist. Daher liegt eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) vor.  $\square$

Auch die Begriffe differenzierbare Abbildung und Tangentialraum übertragen sich auf eine Mannigfaltigkeit mit Rand.

**Lemma 88.4.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $n$ . Dann ist der Rand  $\partial M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension  $n - 1$ .*

*Beweis.* Zunächst ist  $L = \partial M$  mit der induzierten Topologie ein Hausdorff-Raum. Sei  $P \in L$  und sei

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte mit  $V \subseteq H$  offen und  $\alpha(P) \in \partial H$ . Da  $\alpha$  eine Homöomorphie ist und da nach Lemma 88.3 bei jeder Karte Randpunkte zu Randpunkten korrespondieren, induziert dies eine Homöomorphie

$$U \cap L \longrightarrow V \cap \partial H.$$

Dabei ist  $U \cap L$  eine offene Umgebung von  $P$  in  $L$ , so dass wir diese Mengen als Kartengebiete nehmen können. Betrachten wir nun einen Kartenwechsel, wobei wir gleich von einem einzigen Kartengebiet  $U \subseteq M$  und zwei Karten  $\alpha_1 : U \rightarrow V_1$  und  $\alpha_2 : U \rightarrow V_2$  mit  $V_1, V_2 \subseteq H$  offen ausgehen können. Es liegt dann ein  $C^1$ -Diffeomorphismus

$$\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

vor. Dies bedeutet zunächst, dass eine Homöomorphie  $\partial H \cap V_1 \rightarrow \partial H \cap V_2$  vorliegt. Die Diffeomorphieeigenschaft bedeutet für jeden Punkt  $P \in U \cap L$ , dass es offene Umgebungen  $\alpha_1(P) \in W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\alpha_2(P) \in W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine diffeomorphe Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : W_1 \longrightarrow W_2$$

von  $\varphi$  von  $V_1 \cap W_1$  nach  $V_2 \cap W_2$  gibt. Diese Fortsetzung induziert dann Aufgabe 88.13 auch eine  $C^1$ -Diffeomorphie zwischen den Rändern  $\partial H \cap W_1$  und  $\partial H \cap W_2$ , so dass insgesamt eine Diffeomorphie

$$\varphi|_{\partial H} : \partial H \cap V_1 \longrightarrow \partial H \cap V_2$$

vorliegt. □

Wir wissen bereits, dass die Faser einer differenzierbaren regulären Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten die Struktur einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit trägt. Auf einem ähnlichen Argument beruht der folgende Satz, der die Existenz von sehr vielen berandeten Mannigfaltigkeiten sichert.

**Satz 88.5.** *Es sei  $L$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und es sei*

$$f : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Jeder Punkt der Faser  $F = f^{-1}(a)$  über  $a$  sei regulär. Dann sind die Teilmengen*

$$M = \{x \in L \mid f(x) \leq a\} \text{ und } N = \{x \in L \mid f(x) \geq a\}$$

*differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand, und zwar ist ihr Rand jeweils gleich  $F$ .*

*Beweis.* Zur Notationsvereinfachung sei  $a = 0$ , und wir beschränken uns auf  $M$ . Es ist

$$M = \{x \in L \mid f(x) < 0\} \uplus F,$$

wobei die linke Menge eine offene Menge von  $L$  und damit eine offene Untermannigfaltigkeit ist. Entscheidend ist also zu zeigen, dass es für die Punkte aus der Faser  $F$  Karten und damit eine Mannigfaltigkeitsstruktur gibt. Sei also  $P \in F$ . Nach dem Beweis des Satzes über implizite Abbildungen gibt es zu  $P \in F$  eine offene (Karten)-Umgebung  $P \in U \subseteq L$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V,$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ , derart, dass  $f = x_1 \circ \alpha$  ist. Dabei korrespondiert  $F \cap U$  zu  $\{x \in V \mid x_1 = 0\}$  und  $M \cap U$  zu  $H_{\leq 0} \cap V$ , so dass also die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $M$  eine Karte für  $M$  in  $P$  liefert. Die Kartenwechsel sind dabei  $C^1$ -diffeomorph, da dies für die (vollen) Karten auf  $L$  gilt.  $\square$

**Beispiel 88.6.** Die abgeschlossene Kugel

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq r\}$$

ist eine  $C^\infty$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der *Sphäre*

$$S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = r\}$$

als Rand. Dies folgt unmittelbar aus Satz 88.5 angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

die in jedem Punkt  $\neq 0$  regulär ist.

**Beispiel 88.7.** Ein abgeschlossener *Quader*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist bei  $n \geq 2$  keine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, da er nicht nur Seiten, sondern auch (je nach Dimension) Ecken und Kanten besitzt. Ein Rechteck besitzt vier Eckpunkte, denen man nicht die Struktur einer (mit dem umgebenden Raum verträglichen) differenzierbaren berandeten Mannigfaltigkeit geben kann (da das abgeschlossene Rechteck homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe ist, kann man darauf die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand erklären; mit dieser Struktur ist aber die natürliche Einbettung in den  $\mathbb{R}^n$  nicht differenzierbar), ein dreidimensionaler Quader besitzt zwölf Kanten und acht Ecken, an denen es keine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur gibt.

Wenn man allerdings diese Ecken, Kanten etc. entfernt und nur die „Seiten der Kodimension eins“ beibehält, so bekommt man eine (nicht kompakte) Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist dabei die disjunkte Vereinigung dieser Hyper-Seiten. Dieser Rand ist, wie bei jeder Mannigfaltigkeit mit Rand, abgeschlossen innerhalb der Mannigfaltigkeit, allerdings nicht abgeschlossen im umgebenden euklidischen Raum.

## 88.2. Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Der  $\mathbb{R}^n$  sei mit der durch die Standardvektoren  $e_1, \dots, e_n$  gegebenen Orientierung versehen, ferner sei der Halbraum

$$H_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$$

als der „innere Halbraum“ ausgezeichnet. Dann nennt man die auf der Hyperebene (also dem Rand der berandeten Mannigfaltigkeit  $H_{\leq 0}$ )

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

durch die Basis  $e_2, \dots, e_n$  definierte Orientierung die *Orientierung durch die äußere Normale*. Eine beliebige Basis  $v_2, \dots, v_n$  von  $E$  repräsentiert diese Orientierung genau dann, wenn für einen beliebigen Vektor  $v \in H_+$  (das bedeutet, nach „außen“, also raus aus dem Halbraum zu zeigen) die Basis  $v, v_2, \dots, v_n$  (also  $v$  zuerst) von  $\mathbb{R}^n$  die Ausgangsorientierung repräsentiert.<sup>17</sup>

Dieser Zusammenhang zwischen Orientierungen auf einem reellen Vektorraum und Orientierungen auf dem Rand eines Halbraumes überträgt sich auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wichtig ist dabei, dass der Tangentialraum  $T_P M$  in einem Randpunkt  $P$  eine kanonische Hyperebene enthält, nämlich den Tangentialraum  $T_P(\partial M)$  des Randes. Die Mannigfaltigkeit definiert dabei eine „innere“ und eine „äußere Hälfte“ des Tangentialraumes.

**Satz 88.8.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, die eine Orientierung trage. Dann trägt auch die Randmannigfaltigkeit eine kanonische Orientierung, nämlich diejenige, die auf jeder Karte durch die äußere Normale festgelegt ist.*

*Beweis.* Für jede (orientierte) Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

zu  $U \subseteq M$  offen wird die induzierte Karte

$$U \cap \partial M \longrightarrow V \cap \partial H$$

mit der Orientierung durch die äußere Normale auf  $\partial H$  versehen. Nach Voraussetzung besitzen sämtliche Kartenwechsel zu  $M$  in jedem Punkt eine positive Fundamentaldeterminante bzgl. den die Orientierungen repräsentierenden Basen, und wir müssen zeigen, dass dies auch für die induzierten Kartenwechsel gilt. Dabei können wir von einem offenen Kartengebiet  $P \in U \subseteq M$  und zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

<sup>17</sup>Dies ist für eine Halbgerade  $H = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$  mit seinem einzigen Randpunkt  $\{0\}$  folgendermaßen zu interpretieren. Die beiden Orientierungen auf  $\{0\}$  sind  $+$  und  $-$ , und  $-$  repräsentiert die Orientierung durch die äußere Normale, da für einen nach außen weisenden Vektor  $w \in \mathbb{R}_-$  der entgegengesetzte Vektor  $-w$  die Standardorientierung von  $\mathbb{R}$  repräsentiert. Für den negativen Halbraum  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  repräsentiert hingegen im Nullpunkt  $+$  die Orientierung durch die äußere Normale.

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

ausgehen und die Übergangsabbildung

$$\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

mit offenen Mengen  $V_1 \subseteq H_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $V_2 \subseteq H_2 \subset \mathbb{R}^n$  betrachten. Es sei  $v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $\partial H_1$  und  $v_1 \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $v_1$  die äußere Normale von  $H_1$  repräsentiert, dass also  $v_1, v_2, \dots, v_n$  die Orientierung des  $\mathbb{R}^n$  repräsentiert (es seien  $x_1, \dots, x_n$  die zugehörigen Koordinaten); ebenso sollen  $w_1, w_2, \dots, w_n \in H_2$  die entsprechenden Eigenschaften erfüllen. Wir schreiben die Fundamentalmatrix von  $\varphi$  bzgl. diesen Basen hin, also die Matrix mit den Einträgen

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(Q) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Die Determinante davon ist nach Voraussetzung positiv. Wegen  $\varphi(\partial H_1) \subseteq \partial H_2$  gilt für einen Punkt  $Q \in \partial H_1$  die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(Q) = 0$$

für  $j = 2, \dots, n$ . Nach dem Entwicklungssatz hängt daher das Vorzeichen der Determinante der Matrix

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(Q) \right)_{2 \leq i, j \leq n},$$

die die Fundamentalmatrix der Übergangsabbildung der Randkarten

$$U_1 \cap \partial H_1 \longrightarrow U_2 \cap \partial H_2$$

(bzgl. den Basen  $v_2, \dots, v_n$  und  $w_2, \dots, w_n$ ) im Punkt  $Q$  ist, nur von  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(Q)$  ab. Dabei gilt mit  $Q = (0, a_2, \dots, a_n)$  nach Lemma 43.2 die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(Q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(\epsilon, a_2, \dots, a_n)}{\epsilon}.$$

Da  $v_1$  die äußere Normale repräsentiert, ist bei negativem (betragsmäßig hinreichend kleinen)  $\epsilon$  der Vektor mit den Koordinaten  $(\epsilon, a_2, \dots, a_n) \in H_1$ . Daher muss der Bildvektor zu  $H_2$  gehören und daher ist wiederum  $\varphi_1(\epsilon, a_2, \dots, a_n) < 0$ . Also ist dieser Quotient  $\geq 0$ , was dann auch für den Limes gilt. Da ein Diffeomorphismus vorliegt, muss der Limes sogar positiv sein, woraus die Aussage folgt.  $\square$

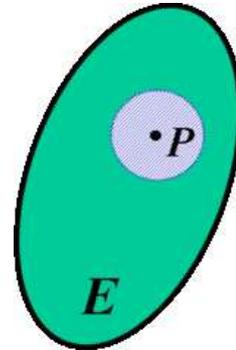
## 89. VORLESUNG

### 89.1. Partitionen der Eins.

Wir besprechen nun eine wichtige analytische Hilfstechnik namens *Partition der Eins*. Wir werden sie im Beweis für die Aussage, dass orientierbare Mannigfaltigkeiten eine positive Volumenform besitzen, und für den Beweis des

Satzes von Stokes einsetzen. In dieser Vorlesung werden wir Partitionen der Eins konstruieren, wozu wir zunächst einige topologische Begriffe benötigen.

Das offene Innere ist die Vereinigung aller inneren Punkte, also derjenigen Punkte von  $T$  (im Bild  $E$ ), die mit einer ganzen offenen Umgebung in  $T$  enthalten sind.



**Definition 89.1.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T \subseteq X$  eine Teilmenge. Dann heißt

$$T^\circ = \bigcup_{U \text{ offen, } U \subseteq T} U$$

das *offene Innere* (oder *Innere*) von  $T$ .

**Definition 89.2.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T \subseteq X$  eine Teilmenge. Dann heißt

$$\bar{T} = \bigcap_{A \text{ abgeschlossen, } T \subseteq A} A$$

der *Abschluss* (oder *topologische Abschluss*) von  $T$ .

Diese beiden Begriffe stehen durch

$$\bar{T} = X \setminus (X \setminus T)^\circ$$

miteinander in Beziehung.

**Definition 89.3.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt der topologische Abschluss

$$\overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der *Träger* von  $f$ .

**Definition 89.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *kompakte Ausschöpfung*  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von  $X$  ist eine Folge von kompakten Teilmengen  $A_n \subseteq X$  mit

$$A_n \subseteq A_{n+1}^\circ \text{ und } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X.$$

**Lemma 89.5.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann besitzt  $M$  eine kompakte Ausschöpfung.*

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $P \in M$  gibt es eine offene Kartenumgebung  $P \in U$ ,

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

sowie Ballumgebungen

$$U(\alpha(P), \epsilon) \subseteq B(\alpha(P), \epsilon) \subset V.$$

Wegen der Homöomorphie der Kartenabbildung und der Kompaktheit der abgeschlossenen Bälle ist  $B_P = \alpha^{-1}(B(\alpha(P), \epsilon))$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , die die offene Umgebung  $U_P = \alpha^{-1}(U(\alpha(P), \epsilon))$  von  $P$  umfasst. Die  $U_P$ ,  $P \in M$ , bilden eine offene Überdeckung von  $M$ , so dass es nach Aufgabe 63.4 eine abzählbare Teilüberdeckung gibt. Diese sei mit  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bezeichnet (wobei die  $U_n$  in den kompakten Teilmengen  $B_n$  liegen). Wir definieren nun rekursiv eine monoton wachsende Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, k \longmapsto n_k,$$

derart, dass

$$A_k = \bigcup_{n=0}^{n_k} B_n, k \in \mathbb{N},$$

eine kompakte Ausschöpfung von  $M$  ist. Als eine endliche Vereinigung von kompakten Mengen sind diese  $A_k$  kompakt. Wir beginnen mit  $n_0 = 0$ . Sei  $n_k$  schon konstruiert. Die Menge

$$A_k \cup B_{n_{k+1}}$$

ist kompakt und wird daher von endlich vielen offenen Mengen  $\bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n$  überdeckt, wobei wir  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  wählen. Mit dieser Wahl ist

$$A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} B_n = A_{k+1},$$

und diese Folge bildet eine Ausschöpfung, da die  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Überdeckung bilden.  $\square$

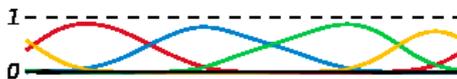
**Definition 89.6.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X = \bigcup_{i \in I} W_i$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Eine Familie von Funktionen

$$h_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $j \in J$  heißt eine *der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins*, wenn folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Es ist  $h_j(X) \subseteq [0, 1]$  für alle  $j \in J$ .
- (2) Jeder Punkt  $P \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $P \in U$  derart, dass die eingeschränkten Funktionen  $h_j|_U$  bis auf endlich viele Ausnahmen die Nullfunktion sind.
- (3) Es ist  $\sum_{j \in J} h_j = 1$ .
- (4) Für jedes  $j \in J$  gibt es eine offene Menge  $W_{i(j)}$  aus der Überdeckung derart, dass der Träger von  $h_j$  in  $W_{i(j)}$  liegt.

Wenn alle  $h_j$  stetig sind, so spricht man von einer *stetigen Partition der Eins*.



Die ersten drei Eigenschaften sind die Partitionseigenschaften, die vierte Eigenschaft bedeutet, dass die Partition der Überdeckung untergeordnet ist. Die zweite Eigenschaft sichert dabei, dass die Summe in (3) definiert ist, da für jeden Punkt  $P \in X$  und fast alle  $j \in J$  die Gleichheit  $h_j(P) = 0$  gilt.

Bei einer Mannigfaltigkeit nennt man eine solche Partition *differenzierbar*, wenn alle  $h_j$  differenzierbare Funktionen sind.

**Lemma 89.7.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Es sei  $M = \bigcup_{i \in I} W_i$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann gibt es einen abzählbaren verträglichen Atlas  $(U_j, \alpha_j, V_j)$ ,  $j \in J$ , mit Ballumgebungen*

$$U(0, \delta_j) \subset B(0, \epsilon_j) \subset V_j$$

(dabei ist  $0 \in V_j \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\delta_j < \epsilon_j$ ) derart, dass es für jedes  $j \in J$  ein  $W_{i(j)}$  gibt mit  $U_j \subseteq W_{i(j)}$ , dass  $M$  von  $\alpha_j^{-1}(U(0, \delta_j))$ ,  $j \in J$ , überdeckt wird und dass jeder Punkt  $P \in M$  nur in endlich vielen der Mengen  $U_j$  liegt.

*Beweis.* Es sei die offene Überdeckung  $W_i$ ,  $i \in I$ , gegeben. Ferner sei  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine kompakte Ausschöpfung von  $M$ , die es nach Lemma 89.5 gibt. Die offenen Mengen  $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$  bilden ebenfalls eine offene Überdeckung, da es zu jedem Punkt  $P \in M$  ein minimales  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $P \in A_n$  (es sei  $A_{-1} = \emptyset$ ). Indem wir die Durchschnitte  $W_i \cap (A_{n+1}^o \setminus A_{n-1})$  betrachten, können wir annehmen, dass alle Mengen der Überdeckung innerhalb von einem  $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$  liegen. Zu jedem Punkt  $P \in M$  gibt es eine offene (verträgliche) Kartenumgebung  $P \in U_P$ , die in einem der  $W_i$  liegt und für die es Ballumgebungen

$$U(0, \delta_P) \subset B(0, \epsilon_P) \subset V_P$$

gibt mit  $P \in \alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P))$  und  $\delta_P < \epsilon_P$ . Diese  $\alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P))$ ,  $P \in M$ , bilden dann ebenfalls eine offene Überdeckung von  $M$ . Nach Aufgabe 63.4 können wir zu einer abzählbaren Teilüberdeckung davon übergehen. Wir können also annehmen, dass ein System von Karten  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zusammen mit Ballumgebungen

$$U(0, \delta_n) \subset B(0, \epsilon_n) \subset V_n$$

derart gegeben ist, dass auch  $\alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine offene Überdeckung ist, dass jedes  $U_n$  in einem  $W_{i(n)}$  liegt und dass die oben beschriebene Beziehung zu der kompakten Ausschöpfung gilt. Wir werden eine Teilmenge  $J \subseteq \mathbb{N}$  definieren derart, dass die Familie  $U_j$ ,  $j \in J$ , auch noch die Endlichkeitseigenschaft erfüllt. Zu  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die kompakte Menge  $A_{n+1} \setminus A_n^o$ . Diese wird von endlich vielen der  $\alpha_k^{-1}(U(0, \delta_k))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , überdeckt, und zwar braucht man dazu nur Indizes  $k$  mit der Eigenschaft, dass

$U_k$  in  $A_{n+2}^o \setminus A_{n-1}$  liegt. Die zugehörige endliche Indexmenge sei mit  $J_n$  bezeichnet, und sei  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ . Dann wird jedes  $A_n$  nur von endlich vielen der  $U_k$ ,  $k \in J$ , getroffen.  $\square$

**Satz 89.8.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine der Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins.*

*Beweis.* Nach Lemma 89.7 können wir davon ausgehen, dass eine offene Überdeckung von Kartengebieten  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit

$$\alpha_n : U_n \longrightarrow V_n$$

und mit Ballumgebungen

$$U(0, \delta_n) \subset B(0, \epsilon_n) \subset V_n$$

(mit  $\delta_n < \epsilon_n$ ) vorliegt derart, dass auch die  $\alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n))$  eine Überdeckung bilden und dass jeder Punkt  $P \in M$  nur in endlich vielen dieser offenen Bälle enthalten ist. Auf  $V_n$  betrachten wir die Funktion  $g_n$ , die durch

$$g_n(v) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\delta_n^2 - v^2)^2}} & \text{für } |v| < \delta_n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist. Diese Funktion hat genau auf  $U(0, \delta_n)$  einen positiven Wert und ihr Träger ist  $B(0, \delta_n)$ . Eine Überlegung auf den beiden offenen Teilmengen (die  $V_n$  überdecken)  $U(0, \epsilon_n)$  und  $V_n \setminus B(0, \delta_n)$  zeigt, dass  $g_n$  unendlich oft differenzierbar ist. Wir definieren eine Funktion

$$\tilde{g}_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g(\alpha_n(x)) & \text{für } x \in \alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf  $M$ , da der „Streifen“  $B(0, \epsilon_n) \setminus U(0, \delta_n)$  einen glatten Übergang erlaubt. Wir setzen

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{g}_n(x),$$

wobei dies für jeden Punkt eine endliche Summe ist, da der Träger von  $\tilde{g}_n$  in  $\alpha^{-1}(B(0, \delta_n)) \subset U_n$  liegt. Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf  $M$  und überall positiv, da die  $\tilde{g}_n(x)$  auf den überdeckenden Mengen  $\alpha^{-1}(U(0, \delta_n))$  positiv sind. Dann bilden die

$$h_n = \frac{\tilde{g}_n}{\tilde{g}}$$

die gesuchte Partition der Eins.  $\square$

## 89.2. Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten und Volumenformen.

Mit Hilfe von Partitionen der Eins können wir nun die Umkehrung von Lemma 84.5 beweisen.

**Satz 89.9.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann existiert genau dann eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$ , wenn  $M$  orientierbar ist. Diese Volumenform kann dann auch stetig differenzierbar und positiv gewählt werden.*

*Beweis.* Die eine Richtung wurde bereits in Lemma 84.5 bewiesen. Es sei also umgekehrt ein abzählbarer orientierter Atlas  $(U_i, V_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$ , von  $M$  gegeben. Dabei ist  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  definieren eine nullstellenfreie stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) Volumenform  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  auf  $V_i$ . Wir setzen

$$\omega_i = \alpha_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und erhalten so eine nullstellenfreie Volumenform auf  $U_i$ , die wir außerhalb von  $U_i$  durch 0 fortsetzen.<sup>18</sup>

Es sei nun  $h_j$ ,  $j \in J$ , eine der Überdeckung  $U_i$ ,  $i \in I$ , untergeordnete, stetige Partition der Eins, die es nach Satz 89.8 gibt. Insbesondere gibt es also für jedes  $j$  ein  $i(j)$  derart, dass der Träger von  $h_j$  in  $U_{i(j)}$  liegt. Daher sind die  $h_j \omega_{i(j)}$  stetige  $n$ -Differentialformen auf  $M$ . Wir setzen

$$\omega = \sum_{j \in J} h_j \omega_{i(j)}.$$

Dies ist für jeden Punkt  $P \in M$  eine endliche Summe und somit eine wohldefinierte stetige  $n$ -Differentialform auf  $M$ . Für einen Punkt  $P \in M$  und eine die Orientierung repräsentierende Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $T_P M$  ist

$$\omega(P; v_1, \dots, v_n) = \sum_{j \in J} h_j(P) \omega_{i(j)}(P; v_1, \dots, v_n).$$

Dabei gibt es ein  $j$  mit  $h_j(P) > 0$ , und für dieses  $j$  ist auch  $\omega_{i(j)}(P; v_1, \dots, v_n) > 0$ , so dass diese Form überall positiv ist.  $\square$

<sup>18</sup>Diese Fortsetzung ist natürlich nicht stetig, das spielt aber für das Folgende keine Rolle.

## 90. VORLESUNG



George Stokes (1819 -1903)

Der Satz von Stokes gehört zu den wichtigsten Sätzen der Mathematik. Er stiftet eine direkte Beziehung zwischen dem Integral einer Differentialform über dem Rand einer berandeten Mannigfaltigkeit und dem Integral der äußeren Ableitung dieser Form über der gesamten Mannigfaltigkeit. Damit handelt es sich um eine weitgehende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung, nach dem das bestimmte Integral einer auf einem Intervall definierten Funktion mittels der Stammfunktion allein durch die Werte am Intervallrand ausgedrückt werden kann.

## 90.1. Der Satz von Stokes-Quaderversion.

Bevor wir den Satz von Stokes allgemein formulieren und beweisen, geben wir die Quaderversion davon, bei der der Definitionsbereich der Differentialform ein Quader ist, dessen Rand aus seinen Seiten besteht. Damit dieses geometrische Objekt eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, müssen wir die „Kanten“ herausnehmen. Allerdings sind die Kanten auf den Seiten jeweils Nullmengen (und ebenso die Seiten auf dem Gesamtquader), so dass beim Integrieren diese Teilmengen ignoriert werden können.

**Satz 90.1.** *Es sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $n$ -dimensionaler Quader (mit Seiten aber ohne Kanten)<sup>19</sup> mit dem Rand  $\partial Q$  und  $\omega$  eine auf einer offenen Umgebung von  $Q$  definierte stetig-differenzierbare  $(n - 1)$ -Differentialform. Dann ist*

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega.$$

<sup>19</sup>Diese Voraussetzungen sichern, dass eine Mannigfaltigkeit mit Rand vorliegt, und zwar ist der Rand die disjunkte Vereinigung der offenen Seiten. Im Beweis werden wir aber auch den abgeschlossenen Quader verwenden.

*Beweis.* Da beide Seiten dieser Gleichung linear in  $\omega$  sind, können wir annehmen, dass  $\omega$  die Gestalt  $\omega = f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  mit einer in einer offenen Umgebung von  $Q$  definierten stetig differenzierbaren Funktion  $f$  besitzt. Die Integrale sind links und rechts Lebesgue-Integrale zu stetigen Funktionen auf Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Daher können wir auf beiden Seiten zum topologischen Abschluss übergehen, da dadurch die in Frage stehenden Integrationsbereiche nur um eine Nullmenge verändert werden, so dass dies die Integrale nicht ändert.

Wir schreiben den abgeschlossenen Quader als  $\bar{Q} = [a, b] \times \tilde{Q}$ . Wir wenden Korollar 83.10 auf jede Seite  $S$  ausgenommen  $a \times \tilde{Q}$  und  $b \times \tilde{Q}$  an und erhalten darauf

$$\int_S \omega = \int_S f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = 0,$$

da auf diesen Seiten jeweils eine der Variablen  $x_2, \dots, x_n$  konstant ist. Aufgrund des Satzes von Fubini und des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung (angewendet auf jedes fixierte  $(x_2, \dots, x_n)$ ) gilt

$$\begin{aligned} \int_Q d\omega &= \int_Q df \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_Q \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\tilde{Q}} \left( \int_{[a,b]} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\tilde{Q}} (f(b, x_2, \dots, x_n) - f(a, x_2, \dots, x_n)) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{b \times \tilde{Q}} f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \int_{a \times \tilde{Q}} f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{S \text{ orientierte Seite von } Q} \int_S f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\partial Q} f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

□

## 90.2. Der Satz von Stokes.

**Satz 90.2.** *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  und mit abzählbarer Topologie, und es sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Differentialform mit kompaktem Träger<sup>20</sup>*

<sup>20</sup>Unter dem Träger einer Differentialform versteht man den topologischen Abschluss der Punkte, auf denen die Form  $\neq 0$  ist.

auf  $M$ . Dann ist

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Beweis.* Es sei  $U_i$ ,  $i \in I$ , eine offene Überdeckung von  $M$  mit orientierten Karten und es sei  $h_j$ ,  $j \in J$ , eine dieser Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins, die nach Satz 89.8 existiert. Zu jedem  $P \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $P \in V_P \subseteq M$  derart, dass  $h_j|_{V_P} = 0$  ist bis auf endlich viele Ausnahmen. Es sei  $Y$  der Träger von  $\omega$ . Die Überdeckung  $Y \subseteq \bigcup_{P \in M} V_P$  besitzt wegen der vorausgesetzten Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir  $Y \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_r = V$ . Daher sind überhaupt nur endlich viele der  $h_j$  auf  $V$  von 0 verschieden. Wir setzen  $\omega_j = h_j \omega$ ; diese Differentialformen sind ebenfalls stetig differenzierbar. Der Träger von  $h_j$  ist eine in  $M$  abgeschlossene Teilmenge, die in  $U_{i(j)}$  liegt, daher liegt der Träger von  $\omega_j$  in  $Y \cap U_{i(j)}$  und ist selbst kompakt nach Aufgabe 82.8. Es gilt

$$\omega = \sum_{j \in J} \omega_j,$$

wobei nur endlich viele dieser Differentialformen  $\omega_j$  von 0 verschieden sind, da  $\omega_j|_{M \setminus Y} = 0$  ist für alle  $j$  und  $\omega_j|_V = 0$  für alle  $j$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Wegen der Additivität des Integrals von Differentialformen und der Additivität der äußeren Ableitung kann man die Aussage für die einzelnen  $\omega_j$  getrennt beweisen. Wir können also annehmen, dass eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Differentialform gegeben ist, die kompakten Träger besitzt, der ganz in einer Kartenumgebung  $U$  liegt. Es liegt ein Diffeomorphismus  $\alpha : U \rightarrow V$  mit  $V \subseteq H$  offen vor, der zugleich einen Diffeomorphismus zwischen den Rändern  $\partial U = \partial M \cap U$  und  $\partial V = \partial H \cap V$  induziert. Dabei gilt

$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\partial V} \alpha^{-1*} \omega$$

und

$$\int_U d\omega = \int_V \alpha^{-1*}(d\omega) = \int_V d(\alpha^{-1*}\omega)$$

nach Lemma 87.2 (5). Wir können also von einer auf  $V \subseteq H$  definierten stetig differenzierbaren Differentialform mit kompakten Träger ausgehen. Diese Form können wir stetig differenzierbar fortsetzen auf eine offene Umgebung von  $H$  im  $\mathbb{R}^n$ . Wegen der Kompaktheit des Trägers gibt es einen hinreichend großen Quader  $Q \subseteq H$ , dessen eine Seite  $S$  auf  $\partial H$  liegt und der den Träger von  $\omega$  nur in  $S$  trifft. Auf allen anderen Seiten von  $Q$  ist  $\omega$  (und damit auch  $d\omega$ ) die Nullform. Daher gilt einerseits

$$\int_H d\omega = \int_Q d\omega$$

und andererseits

$$\int_{\partial H} \omega = \int_S \omega = \int_{\partial Q} \omega.$$

Somit folgt die Aussage aus der Quaderversion des Satzes von Stokes.  $\square$

**Korollar 90.3.** *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Differentialform mit kompaktem Träger auf  $M$ . Dann ist*

$$\int_M d\omega = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt wegen  $\partial M = \emptyset$  unmittelbar aus Satz 90.2.  $\square$

**Korollar 90.4.** *Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand und mit abzählbarer Topologie, und es sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Differentialform mit kompaktem Träger auf  $M$ , die auf dem Rand  $\partial M$  konstant gleich 0 ist. Dann ist*

$$\int_M d\omega = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 90.2.  $\square$

Wichtig bei der vorstehenden Aussage ist, dass  $\omega$  auf dem Rand 0 ist; es genügt nicht, dass die äußere Ableitung  $d\omega$  auf dem Rand 0 ist, wie schon die eindimensionale Situation zeigt.

Es gibt viele Möglichkeiten, die Volumenform  $\tau = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  des  $\mathbb{R}^n$  als äußere Ableitung einer  $(n-1)$ -Form zu realisieren, bspw. mit  $\omega = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Damit kann man die Berechnung des Volumens eines berandeten Körpers auf die Berechnung eines Integrals über den Rand zurückführen. Im ebenen Fall nennt man diese Aussage auch den *Satz von Green*.

**Satz 90.5.** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand<sup>21</sup>  $\delta M$ , und es seien*

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist*

$$\int_M \left( -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) dx \wedge dy = \int_{\partial M} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 90.2, angewendet auf die stetig differenzierbare 1-Form  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ .  $\square$

<sup>21</sup>Die umgebende reelle Ebene spielt nur insofern eine Rolle, dass durch sie Koordinaten und Differentialformen auf  $M$  festgelegt werden.

**Korollar 90.6.** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$ . Dann ist der Flächeninhalt von  $M$  gleich*

$$\lambda^2(M) = \int_{\partial M} x dy = - \int_{\partial M} y dx.$$

*Beweis.* Dies folgt wegen  $\lambda^2(M) = \int_M dx \wedge dy$  aus Satz 90.5 angewendet auf  $f = 0, g = x$  bzw.  $f = -y, g = 0$ .  $\square$

### 90.3. Der Brouwersche Fixpunktsatz.

**Satz 90.7.** *Es sei  $M$  eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  und mit abzählbarer Topologie. Dann gibt es keine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\varphi : M \longrightarrow \partial M,$$

*deren Einschränkung auf  $\partial M$  die Identität ist.*

*Beweis.* Der Rand  $\partial M$  ist nach Satz 88.8 eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Daher gibt es nach Satz 89.8 eine stetig differenzierbare positive Volumenform  $\tau$  auf  $\partial M$ . Es ist  $\int_{\partial M} \tau > 0$ . Die äußere Ableitung der Volumenform  $\tau$  ist 0. Nehmen wir an, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung

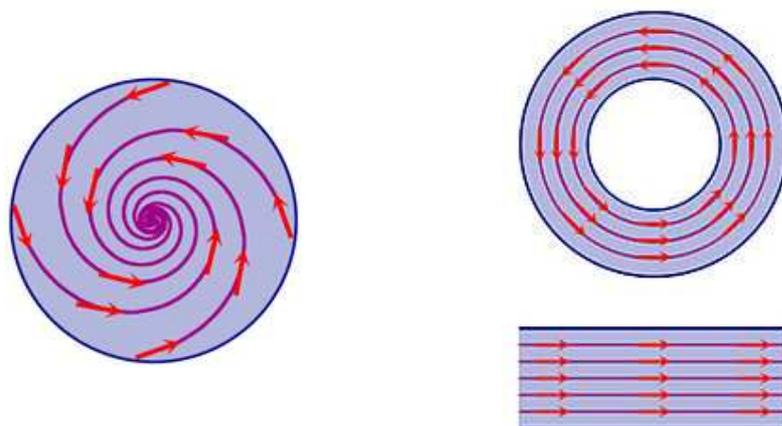
$$\varphi : M \longrightarrow \partial M$$

mit  $\varphi|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$  gebe. Dann ist die zurückgezogene Form  $\varphi^*\tau$  eine  $(n-1)$ -Differentialform auf  $M$ , deren Einschränkung auf den Rand mit  $\tau$  übereinstimmt. Daher gilt unter Verwendung von Satz 90.2 und Satz 87.4 (5)

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \tau &= \int_{\partial M} \varphi^* \tau \\ &= \int_M d(\varphi^* \tau) \\ &= \int_M \varphi^*(d\tau) \\ &= \int_M \varphi^*(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Man formuliert diese Aussage auch so, dass man sagt, dass es keine (stetig differenzierbare) *Retraktion* auf den Rand gibt.



**Satz 90.8.** *Es sei*

$$\psi : B(0, r) \longrightarrow B(0, r)$$

*eines stetig differenzierbare Abbildung der abgeschlossenen Kugel im  $\mathbb{R}^n$  in sich. Dann besitzt  $\psi$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Zur Notationsvereinfachung sei  $r = 1$ . Nehmen wir an, dass es eine fixpunktfreie stetig differenzierbare Abbildung  $\psi$  geben würde. Dann ist stets  $x \neq \psi(x)$ , so dass die beiden Punkte eine Gerade definieren. Die Idee ist, mittels dieser Geraden einen (der beiden) Durchstoßungspunkt mit der Sphäre als Bildpunkt einer Retraktion zu nehmen. Mit der Hilfsfunktion

$$h(x) = \frac{\psi(x) - x}{\|\psi(x) - x\|}$$

definieren wir eine Abbildung

$$\varphi : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$\varphi(x) = x + \left( -\langle x, h(x) \rangle + \sqrt{1 + \langle x, h(x) \rangle^2 - \|x\|^2} \right) \cdot h(x).$$

Dabei ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Dies ist bei  $\|x\| < 1$  klar und bei  $\|x\| = 1$  liegt ein Punkt auf der Sphäre vor, dessen Verbindungsgerade mit dem Kugelpunkt  $\psi(x)$  nicht senkrecht zu  $x$  ist (der affine Tangentialraum trifft eine Kugel nur in einem Punkt), so dass  $\langle x, h(x) \rangle \neq 0$  ist. Da die Quadratwurzel und der Betrag außerhalb des Nullpunktes stetig differenzierbar sind, handelt es sich bei  $h(x)$  und bei  $\varphi(x)$  um stetig differenzierbare Abbildungen. Die Abbildung  $\varphi$  bildet die Kugel auf die Sphäre ab und ihre Einschränkung auf die Sphäre ist die Identität. Damit liegt eine stetig differenzierbare Retraktion der Vollkugel auf ihren Rand vor, was nach Satz 90.7 nicht sein kann.  $\square$

## Arbeitsblätter

### 61. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 61.1.** Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

**Aufgabe 61.2.** Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

**Aufgabe 61.3.** Nehmen wir an, dass auf der Erde abzählbar unendlich viele Menschen leben würden, und dass jeder Mensch genau einen Euro besitzt. Finde eine „Umverteilungsvorschrift“, die jeden Menschen zu einem Euro-Milliardär macht.

**Aufgabe 61.4.** Wir betrachten für je zwei Teilmengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  die symmetrische Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen

$$A \sim B,$$

falls  $A \Delta B$  abzählbar ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf  $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$  definiert wird.

**Aufgabe 61.5.** Der Barbier von Sevilla behauptet, dass er genau diejenigen Bürger von Sevilla rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Weise nach, dass er lügt.

**Aufgabe 61.6.** Zeige, dass die Potenzmenge einer Menge niemals abzählbar unendlich ist.

**Aufgabe 61.7.** Wir nennen eine reelle Zahl *adressierbar*, wenn es einen endlichen Text (über einem fixierten endlichen Alphabet, das aus mathematischen oder sonstigen Symbolen besteht) gibt, der diese Zahl eindeutig beschreibt. Ist die Menge dieser Zahlen abzählbar? Was ergibt sich, wenn man das Diagonalargument aus dem Beweis zu Satz 61.9 anwendet?

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 61.8. (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine abzählbare Menge. Zeige, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von  $M$  abzählbar ist.

#### Aufgabe 61.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Polynome in einer Variablen mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.

#### Aufgabe 61.10. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$  überabzählbar ist.

#### Aufgabe 61.11. (7 Punkte)

Es sei  $I$  eine Indexmenge und  $a_i, i \in I$ , eine summierbare Familie von nicht-negativen reellen Zahlen. Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$$

abzählbar ist.

## 62. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 62.1.** Von welchen ebenen Figuren und räumlichen Gebilden kennen Sie den Flächeninhalt bzw. das Volumen?

**Aufgabe 62.2.** Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{C}$  das Mengensystem auf  $M$ , das aus allen endlichen Teilmengen von  $M$  und deren Komplementen besteht. Zeige, dass  $\mathcal{C}$  eine Mengenalgebra ist.

**Aufgabe 62.3.** Sei  $M$  eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  mit dem Durchschnitt  $\cap$  als Multiplikation und der symmetrischen Differenz  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  als Addition ein kommutativer Ring ist.

**Aufgabe 62.4.** Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{R}$  ein Mengensystem auf  $M$ . Zeige, dass  $\mathcal{R}$  genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn es ein Unterring des Potenzmengenringes  $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$  ist.

**Aufgabe 62.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $M$ . Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

- (1) Es ist  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (2) Mit  $S, T \in \mathcal{A}$  gehört auch  $T \setminus S$  zu  $\mathcal{A}$ .
- (3) Für jede abzählbare Familie  $T_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in I$ , ist auch

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

**Aufgabe 62.6.** Sei  $M$  eine Menge und sei  $\mathcal{A}_j$ ,  $j \in J$ , eine beliebige Familie von  $\sigma$ -Algebren auf  $M$ . Zeige, dass der Durchschnitt

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

ebenfalls eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  ist.

**Aufgabe 62.7.** Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{A}$  ein Mengensystem auf  $M$ . Zeige, dass  $\mathcal{A}$  genau dann ein durchschnittsstabiles Dynkin-System ist, wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

**Aufgabe 62.8.** Zeige, dass messbare Abbildungen zwischen Messräumen die folgenden einfachen Eigenschaften erfüllen.

- (1) Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.
- (2) Jede konstante Abbildung ist messbar.
- (3) Die Identität ist messbar.
- (4) Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $M$ . Dann ist die Identität auf  $M$  genau dann  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbar, wenn  $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$  gilt.

**Aufgabe 62.9.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es sei  $\mathbb{Z}$  mit der ganzen Potenzmenge als  $\sigma$ -Algebra versehen. Sei  $T \subseteq M$ . Zeige, dass  $T$  genau dann messbar ist, wenn die Indikatorfunktion

$$e_T : M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

messbar ist.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 62.10. (3 Punkte)

Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{A}$  das Mengensystem auf  $M$ , das aus allen abzählbaren Teilmengen von  $M$  und deren Komplementen besteht. Zeige, dass  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

#### Aufgabe 62.11. (4 Punkte)

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und sei  $k$  ein Teiler von  $n$ . Zeige, dass die Menge der Teilmengen von  $M$ , deren Elementanzahl ein Vielfaches von  $k$  ist, ein Dynkin-System bilden, das bei  $k \neq 1, n$  keine Mengen-Algebra ist.

#### Aufgabe 62.12. (4 Punkte)

Es seien  $M$  und  $N$  Mengen und es sei

$$F : M \longrightarrow N$$

eine Abbildung.

a) Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ . Zeige, dass das Mengensystem

$$\{T \subseteq N \mid F^{-1}(T) \in \mathcal{A}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $N$  ist.

b) Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $N$ . Zeige, dass das Mengensystem

$$\{F^{-1}(T) \mid T \in \mathcal{B}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  ist.

#### Aufgabe 62.13. (4 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es sei  $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$  eine Zerlegung von  $M$  in abzählbar viele messbare Teilmengen. Es sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine Abbildung in einen weiteren Messraum  $(N, \mathcal{B})$ . Zeige, dass  $\varphi$  genau dann messbar ist, wenn sämtliche Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{M_i} : M_i \longrightarrow N$$

messbar sind.

#### Aufgabe 62.14. (6 Punkte)

Es seien  $P_1 = (a_1, b_1)$ ,  $P_2 = (a_2, b_2)$  und  $P_3 = (a_3, b_3)$  drei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  dar.

## 63. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 63.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass in  $X$  die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten  $x$  und  $y$  gibt es offene Mengen  $U$  und  $V$  mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

**Aufgabe 63.2.** Zeige, dass in einem Hausdorff-Raum  $X$  jeder Punkt  $x \in X$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 63.3.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass dann auch jeder Unterraum  $Y \subseteq X$  mit der induzierten Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

**Aufgabe 63.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass es zu jeder Überdeckung  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit offenen Mengen  $U_i$  eine abzählbare Teilüberdeckung gibt.

**Aufgabe 63.5.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeige, dass die Mengen

$$\{T \in \mathcal{A} \mid \mu(T) < \infty\},$$

einen Mengen-Präring, aber im Allgemeinen keine Mengen-Algebra bilden.

**Aufgabe 63.6.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zeige, dass durch

$$\lambda(T) := c\mu(T)$$

ein Maß auf  $M$  definiert ist.<sup>22</sup> Diskutiere insbesondere die Teilmengen mit  $\mu(T) = \infty$ .

---

<sup>22</sup>Dieses Maß nennt man das mit  $c$  umskalierte Maß.

**Aufgabe 63.7.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum. Wir nennen ein Maß auf  $M$  *explosiv*, wenn es lediglich die Werte 0 und  $\infty$  annimmt.

a) Zeige, dass (für  $T \in \mathcal{A}$ ) durch

$$\gamma(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T = \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } T \neq \emptyset, \end{cases}$$

ein Maß definiert ist.

b) Es sei  $\mu$  ein Maß auf  $(M, \mathcal{A})$ . Zeige, dass durch

$$\lambda(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \mu(T) > 0, \end{cases}$$

ebenfalls ein Maß definiert ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 63.8.** (4 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass

$$\{x \in M \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$$

messbar ist.

**Aufgabe 63.9.** (4 Punkte)

Zeige, dass es eine abzählbare Familie von offenen Bällen im  $\mathbb{R}^n$  gibt, die eine Basis der Topologie bilden.

**Aufgabe 63.10.** (4 Punkte)

Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und es seien  $T_1, T_2 \subseteq X$  zwei disjunkte endliche Teilmengen. Zeige, dass es offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq X$  gibt mit  $T_1 \subseteq U_1$ ,  $T_2 \subseteq U_2$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**Aufgabe 63.11.** (4 Punkte)

Zeige, dass es auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein wohl-definiertes Konzept von *Borel-Mengen* gibt.

**Aufgabe 63.12.** (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ , mit  $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$  und  $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$  überabzählbar ist.

## 64. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 64.1.** Man mache sich klar, dass die Maßtheorie auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  „nahezu“ äquivalent ist zur Theorie der Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden. Warum nur nahezu? Welches maßtheoretische Konzept korrespondiert dabei zur Konvergenz der Reihe?

**Aufgabe 64.2.** Bestimme die Belegungsfunktion zu einem Dirac-Maß.

**Aufgabe 64.3.** Es sei  $W = [0, 1]^n$  der halboffene Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}_+$  und das zugehörige Gittermaß  $\mu_{\frac{1}{k}}$  die Beziehung

$$\mu_{\frac{1}{k}}(W) = 1$$

gilt.

**Aufgabe 64.4.** Wir betrachten die Menge  $T = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , und zu jedem  $\epsilon > 0$  das zugehörige Gittermaß  $\mu_\epsilon$ . Zeige, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\frac{1}{k}}(T)$$

existiert, dass aber

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon(T)$$

nicht existiert.

**Aufgabe 64.5.** Man zeige durch ein Beispiel, dass die „Schrumpfformel“ aus Lemma 64.4 (6) nicht ohne die Endlichkeitsvoraussetzung gilt.

**Aufgabe 64.6.** Wo geht in den Beweis zu Satz 64.7 die Endlichkeit der  $M_n$  ein?

**Aufgabe 64.7.** Zeige, dass das Bildmaß eines Maßes unter einer messbaren Abbildung in der Tat ein Maß ist.

**Aufgabe 64.8.** Es seien  $(M, \mathcal{A})$ ,  $(N, \mathcal{B})$  und  $(S, \mathcal{C})$  Messräume und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

und

$$\psi : N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei  $\mu$  ein Maß auf  $M$ . Zeige, dass für die Bildmaße die Beziehung

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu = \psi_*(\varphi_* \mu)$$

gilt.

**Aufgabe 64.9.** Es seien  $M$  und  $N$  Messräume und es sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei  $\delta_x$  das im Punkt  $x \in M$  konzentrierte Dirac-Maß. Zeige  $\varphi_*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 64.10.** (3 Punkte)

Bestimme die Belegungsfunktion zum Gittermaß zum Gitterabstand  $\epsilon > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 64.11.** (3 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(N, \mathcal{B})$  ein Messraum und  $C$  die Menge der messbaren Abbildungen von  $M$  nach  $N$ . Für  $f, g \in C$  sei

$$f \sim g, \text{ falls } \mu(\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 64.12.** (6 Punkte)

Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon(S) = \pi,$$

wobei  $\mu_\epsilon$  das Gittermaß zu  $\epsilon > 0$  bezeichnet.

(Man denke an das Riemann-Integral.)

**Aufgabe 64.13.** (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen  $\sigma$ -endlichen Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und eine messbare Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

in einen Messraum  $N$  derart, dass das Bildmaß  $\varphi_* \mu$  nicht  $\sigma$ -endlich ist.

## 65. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 65.1.** Welche „vertrauten geometrischen Figuren“ kann man als (verallgemeinerten) Quader in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  oder in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  auffassen?

**Aufgabe 65.2.** Es seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen und sei  $T \subseteq M \times N$  eine Teilmenge. Zu  $x \in M$  sei  $T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}$ . Zeige, dass  $\{x\} \times T(x)$  die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über  $x$  ist.

**Aufgabe 65.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $N \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass das Mengensystem

$$N \cap T, T \in \mathcal{A},$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $N$  ist (man spricht von der *induzierten  $\sigma$ -Algebra*).

**Aufgabe 65.4.** Es seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei Messräume, die nicht leer seien und wobei die einelementigen Teilmengen messbar seien. Alle Teilmengen von  $M \times N$  seien mit der durch  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  induzierten  $\sigma$ -Algebra versehen. Es sei  $S \subseteq M$ . Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1)  $S$  ist eine messbare Teilmenge von  $M$ .
- (2) Es gibt ein  $y \in N$  derart, dass  $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$  messbar ist.
- (3) Für alle  $y \in N$  ist  $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$  messbar.
- (4) Es gibt ein  $y \in N$  derart, dass  $S \times \{y\}$  messbar in  $M \times N$  ist.
- (5) Für alle  $y \in N$  ist  $S \times \{y\}$  messbar in  $M \times N$ .

**Aufgabe 65.5.** Es seien  $M, N_1, N_2$  Messräume und es seien  $f_1 : M \rightarrow N_1$  und  $f_2 : M \rightarrow N_2$  messbare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$(f_1, f_2) : M \longrightarrow N_1 \times N_2, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar ist.

**Aufgabe 65.6.** Zeige, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  eine Familie  $\epsilon_n, n \in \mathbb{N}$ , von positiven reellen Zahlen gibt mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$ .

**Aufgabe 65.7.** Es seien  $X$  und  $Y$  diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

**Aufgabe 65.8.** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume mit abzählbarer Topologie und mit den zugehörigen  $\sigma$ -Algebren der Borelmengen  $\mathcal{B}(X)$  und  $\mathcal{B}(Y)$ . Zeige, dass das Mengensystem der Borelmengen auf dem Produktraum  $X \times Y$  mit dem Produkt von  $\mathcal{B}(X)$  und  $\mathcal{B}(Y)$  übereinstimmt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 65.9.** (4 Punkte)

Es sei  $\mathcal{P}$  ein Präring auf  $\mathbb{R}$ , der die Intervalle  $[a, b]$ ,  $a < b$ , enthalte, und es sei  $\mu$  ein äußeres Maß darauf, das auf diesen Intervallen den Wert  $b - a$  besitzt. Zeige, dass die Fortsetzung dieses äußeren Maßes auf allen abzählbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  den Wert 0 besitzt.

**Aufgabe 65.10.** (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Abschätzungen in der Abschätzungskette im Beweis zu Lemma 65.3.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile  
 [[/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
 schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort  
 {{:Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Begründungsfenster}}  
 ein.
- (3) Es erscheint die Abschätzungskette. Wenn Sie auf eines der Größer-gleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort  
 [[Ihr Benutzername/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
 hinschreiben.

**Aufgabe 65.11.** (4 Punkte)

Es seien  $(M_1, d_1)$  und  $(M_2, d_2)$  metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge  $M_1 \times M_2$  durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

**Aufgabe 65.12.** (3 Punkte)

Es seien  $(M_1, \mathcal{A}_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n)$  Mengen mit darauf erklärten  $\sigma$ -Algebren. Zeige, dass die Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $M_1 \times \dots \times M_n$  ist, für die alle Projektionen messbar sind.

**Aufgabe 65.13.** (3 Punkte)

Bestimme das Urbild der Einheitskreisscheibe  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  unter den Inklusionsabbildungen

$$\iota_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (x, y).$$

## 66. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 66.1.** Es seien  $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(M_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, es seien  $(N_1, \mathcal{B}_1)$  und  $(N_2, \mathcal{B}_2)$  zwei Messräume und es seien

$$\varphi_1 : M_1 \longrightarrow N_1$$

und

$$\varphi_2 : M_2 \longrightarrow N_2$$

zwei messbare Abbildungen, unter denen die Bildmaße  $(\varphi_1)_*\mu_1$  und  $(\varphi_2)_*\mu_2$   $\sigma$ -endlich seien. Zeige, dass für das Bildmaß unter der Produktabbildung  $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$  die Gleichung

$$\varphi_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = ((\varphi_1)_*\mu_1) \otimes ((\varphi_2)_*\mu_2)$$

gilt.

**Aufgabe 66.2.** Wir betrachten die beiden Rechtecke

$$Q = [-1, 2] \times [1, 4] \text{ und } L = [1, 5] \times [3, 6]$$

im  $\mathbb{R}^2$ . Schreibe den Durchschnitt und die Differenzmengen als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Schreibe die Vereinigung der beiden Mengen auf mehrere Arten als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Welche Darstellung ist eine Verfeinerung einer anderen Darstellung? Wie sieht ein „Raster“ aus, mit dem man alle beteiligten Mengen ausdrücken kann? Bestätige, dass die Summe der beteiligten Rechteckinhalte stets gleich ist.

**Aufgabe 66.3.** Zeige, dass das durch die drei Punkte  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  gegebene abgeschlossene Dreieck nicht zum Produktpräring von  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  und  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  gehört.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 66.4.** (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  und  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  gehört.

**Aufgabe 66.5.** (4 Punkte)

Es sei  $T$  die Vereinigung der drei Quader

$$Q_1 = [2, 7] \times [1, 3], Q_2 = [1, 4] \times [2, 5] \text{ und } Q_3 = [3, 6] \times [4, 6]$$

im  $\mathbb{R}^2$ . Bestimme

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in T\}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und

$$T^a = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda(T(x)) = a\}$$

für jedes  $a \in \mathbb{R}$  (dabei ist  $\lambda$  einfach die Summe der Länge der disjunkten Intervalle, aus denen sich  $T(x)$  zusammensetzt).

Einen Maßraum mit dem Gesamtmaß 1 nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende Konzept enorm wichtig.

Es sei  $(M, \mathcal{E}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt zwei  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$  *unabhängig*, wenn für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und jedes  $B \in \mathcal{B}$  die Gleichheit

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

gilt.

**Aufgabe 66.6.** (4 Punkte)

Es seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei Wahrscheinlichkeitsräume und  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$  ihr Produktraum. Zeige, dass die „Zylinderalgebren“

$$\mathcal{Z}_1 = \{S \times \Omega_2 \mid S \in \mathcal{A}_1\} \text{ und } \mathcal{Z}_2 = \{\Omega_1 \times T \mid T \in \mathcal{A}_2\}$$

unabhängig sind.

**Aufgabe zum Hochladen****Aufgabe 66.7.** (8 Punkte)

Man schreibe eine Animation, die die Unabhängigkeit des Maßes von der Quaderzerlegung im Beweis zu Lemma 66.3 (1) am Beispiel des  $\mathbb{R}^2$  deutlich macht. Insbesondere soll die Einführung eines Rasters und der Begriff der Verfeinerung sichtbar werden.

## 67. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 67.1.** Es seien  $[a, b[$  und  $[c, d[$  zwei halboffene Intervalle (mit  $a \leq b$  und  $c \leq d$ ). Beschreibe den Durchschnitt  $[a, b[ \cap [c, d[$  als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

**Aufgabe 67.2.** Es sei  $\mathcal{M}$  das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass  $\mathcal{M}$  eine Mengen-Algebra ist.

**Aufgabe 67.3.** Man gebe ein Beispiel für eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$ , die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

**Aufgabe 67.4.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass  $\lambda^n(T) < \infty$  ist.

**Aufgabe 67.5.** Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass  $P$  beschränkt ist.

**Aufgabe 67.6.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass  $\lambda^n(U) > 0$  ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

**Aufgabe 67.7.** Man gebe ein Beispiel für ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert  $\infty$  besitzt.

**Aufgabe 67.8.** Es seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume und

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 67.9.** (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$  genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

**Aufgabe 67.10.** (6 Punkte)

Es sei  $\mathcal{V}$  der Mengen-Präring aller Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}$ , die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen  $[a, b[$  schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

- (1) Die zu  $V$  über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

$$V = [a_1, b_1[ \uplus \dots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

- (2) Durch die Zuordnung  $V \mapsto \mu(V)$  wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.

**Aufgabe 67.11.** (5 Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} \mid z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

- Zeige, dass  $C$  überabzählbar ist.
- Zeige, dass  $C$  eine Borel-Menge ist.
- Zeige  $\lambda^1(C) = 0$ .



Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

**Aufgabe 67.12.** (6 Punkte)

Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

**Aufgabe 67.13.** (12 Punkte)

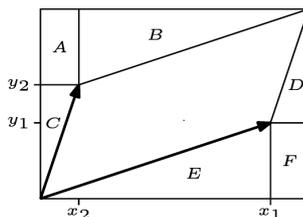
Es sei  $\mu$  ein Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$ , das für alle offenen Bällen  $U(P, r)$  mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige  $\mu = \lambda^n$ .

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

## 68. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 68.1.** Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  die Determinante der durch die Vektoren definierten  $2 \times 2$ -Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



**Aufgabe 68.2.** Es seien  $P_1 = (a_1, b_1)$ ,  $P_2 = (a_2, b_2)$  und  $P_3 = (a_3, b_3)$  drei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  dar.

**Aufgabe 68.3.** Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$(1, 3, 5) \text{ und } (-2, 4, 1)$$

im  $\mathbb{R}^3$  erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

**Aufgabe 68.4.** Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich  $-1$  ist.

(Tipp: Betrachte  $L^t \circ L$ ).

**Aufgabe 68.5.** Es sei

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung und  $c \in \mathbb{R}$ . Zeige die Gleichheit  $L_*(c\lambda^n) = c(L_*\lambda^n)$ .

**Aufgabe 68.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass es eine positive reelle Zahl  $\kappa_n$  gibt derart, dass das  $n$ -dimensionale Volumen einer abgeschlossenen Kugel im  $\mathbb{R}^n$  mit Radius  $r$  und mit einem beliebigen Mittelpunkt gleich  $\kappa_n r^n$  ist.

**Aufgabe 68.7.** Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass  $\varphi$  volumentreu, aber keine Isometrie ist.

**Aufgabe 68.8.** Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein linearer Endomorphismus, der nicht bijektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß  $\varphi_*\lambda^n$  nicht  $\sigma$ -endlich ist.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 68.9. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$(2, 1, 3, 4), (4, 0, -1, 3) \text{ und } (5, -2, -2, 0)$$

im  $\mathbb{R}^4$  erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

#### Aufgabe 68.10. (5 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 3)$  erzeugten „Pseudoparallelogramms“, also von

$$S = \{a(0, 1) + b(2, 0) + c(1, 3) \mid a, b, c \in [0, 1]\}.$$

#### Aufgabe 68.11. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung, die surjektiv, aber nicht injektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß  $\mu = \varphi_* \lambda^n$  für jede Borelmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^m$  durch

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^m(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \lambda^m(T) > 0, \end{cases}$$

bestimmt ist.

#### Aufgabe 68.12. (5 Punkte)

Sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Oberfläche der Einheitskugel. Zeige, dass das Volumen dieser Oberfläche 0 ist.

#### Aufgabe 68.13. (5 Punkte)

Es sei  $u \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl mit  $|u| = 1$ . Zeige, dass die Multiplikationsabbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto uz,$$

flächentreu ist.

(Dabei ist  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  mit dem Borel-Lebesgue-Maß versehen).

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 69.1.** Wir definieren auf  $\overline{\mathbb{R}}$  eine Topologie, indem wir die Mengen  $]a, b[$  (mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $[-\infty, a[$  (mit  $a \in \mathbb{R}$ ) und  $]a, \infty]$  (mit  $a \in \mathbb{R}$ ) als Basis der Topologie nehmen. Zeige, dass  $\mathbb{R}$  offen in dieser Topologie ist und die Unterraumtopologie zu dieser Topologie trägt.

**Aufgabe 69.2.** Zeige, dass die Borelmengen auf  $\overline{\mathbb{R}}$  zu der in Aufgabe 69.1 eingeführten Topologie mit den in der Vorlesung direkt eingeführten Borelmengen übereinstimmen.

**Aufgabe 69.3.** Zeige, dass  $\overline{\mathbb{R}}$  mit der in Aufgabe 69.1 eingeführten Topologie homöomorph zum abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  ist.

**Aufgabe 69.4.** Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die *Diagonale*

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine messbare Teilmenge im Produktraum  $X \times X$  ist.

**Aufgabe 69.5.** Beschreibe eine beliebige einfache Funktion mit Hilfe von Indikatorfunktionen.

**Aufgabe 69.6.** Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder einfach ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 69.7.** (2 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es seien

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

messbar ist.

**Aufgabe 69.8.** (2 Punkte)

Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei  $\sigma$ -einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder  $\sigma$ -einfach ist.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode*  $L > 0$ , wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

**Aufgabe 69.9.** (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode  $L > 0$ .

a) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $f$  ist messbar.
- (2) Die Einschränkung von  $f$  auf das Intervall  $[0, L[$  ist messbar.
- (3) Die Einschränkung von  $f$  auf jedes Intervall der Form  $[a, a + L[$  ist messbar.

b) Zeige, dass diese Äquivalenz für die Stetigkeit nicht gelten muss.

**Aufgabe 69.10.** (5 Punkte)

Bestimme die approximierenden Funktionen  $f_0, f_1, \dots, f_5$  für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

gemäß dem Beweis zu Lemma 69.11.

**Aufgabe 69.11.** (7 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu  $n \in \mathbb{N}_+$  sei die Funktion  $f_n$  durch

$$f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$$

definiert.

- a) Zeige, dass die  $f_n$   $\sigma$ -einfach sind.
- b) Zeige, dass die Funktionenfolge  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , punktweise gegen  $f$  konvergiert.
- c) Zeige, dass diese Funktionenfolge nicht wachsend sein muss.
- d) Sind die  $f_n$  messbar?

## 70. ARBEITSBLATT

In diesem Arbeitsblatt geht es ausschließlich um das Lebesgue-Integral, es darf nicht mit dem Riemann-Integral argumentiert werden.

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 70.1.** Es seien  $M$  und  $N$  Mengen und es seien

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

und

$$f : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abbildungen. Zeige, dass für die Subgraphen die Beziehung

$$(\varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}})^{-1}(S(f)) = S(f \circ \varphi)$$

gilt.

**Aufgabe 70.2.** Zeige, dass das Integral einer messbaren Funktion über eine Nullmenge gleich 0 ist.

**Aufgabe 70.3.** Zeige, dass das Integral der Nullfunktion gleich 0 ist.

**Aufgabe 70.4.** Es sei  $M$  eine abzählbare Menge, die mit dem Zählmaß versehen sei, und sei

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass  $f$  genau dann integrierbar ist, wenn die Familie  $f(m)$ ,  $m \in M$ , summierbar ist, und dass in diesem Fall das Integral gleich der Summe ist.

**Aufgabe 70.5.** Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto cx,$$

über dem Intervall  $[a, b]$ .

**Aufgabe 70.6.** Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1 + \sin x,$$

über dem Intervall  $[0, 2\pi]$ .

## Aufgaben zum Abgeben

### Aufgabe 70.7. (3 Punkte)

Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass  $f$  integrierbar ist. Man gebe auch eine Abschätzung für das Integral  $\int_T f d\lambda^n$  an.

### Aufgabe 70.8. (4 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum. Zeige, dass für jedes  $r \in \mathbb{R}$  die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto (x, t + r),$$

maßtreu ist.

### Aufgabe 70.9. (4 Punkte)

Bestimme das Volumen des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto cx + dy,$$

(mit  $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ) über dem Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### Aufgabe 70.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sin t.$$

Für welches  $a \in [0, 1]$  ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten? Bestimme  $a$  numerisch bis auf 5 Nachkommastellen.

## 71. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 71.1.** Es sei  $M$  ein Messraum mit einer Ausschöpfung  $M_n \uparrow M$  und sei

$$f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass  $S^o(M_n; f_n)$  eine Ausschöpfung von  $S^o(M; f)$  ist.

**Aufgabe 71.2.** Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_n = 1 - \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ). Es sei  $f$  die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) = S(f) \setminus \Gamma_f.$$

**Aufgabe 71.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum, sei  $f$  eine integrierbare nichtnegative numerische Funktionen auf  $M$  und  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zeige, dass auch  $af$  integrierbar ist und dass

$$\int_M af \, d\mu = a \cdot \int_M f \, d\mu$$

gilt.

**Aufgabe 71.4.** Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches  $x \in [0, 1]$  besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 71.5.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \limsup ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

**Aufgabe 71.6.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  und sei

$$y_n := \inf(x_k, k \geq n).$$

a) Zeige, dass die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$  konvergiert.

**Aufgabe 71.7.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf ((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \liminf ((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}),$$

und

$$\limsup ((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \limsup ((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}),$$

messbar sind.

## Aufgaben zum Abgeben

### Aufgabe 71.8. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenfunktionen zu unteren Treppenfunktionen ist.

### Aufgabe 71.9. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto x^2.$$

Berechne für  $n = 1, 2, \dots, 5$  das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

- Die Funktionen  $g \leq f$ , die auf den  $n$  Teilintervallen  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  (mit  $k = 0, \dots, n-1$ ) konstant sind.
- Die Funktionen  $h \leq f$ , die nur die Werte  $\frac{k}{n}$  annehmen.

### Aufgabe 71.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x < y$ , besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

In der folgenden Aufgabe soll die Vermutung von Feldschnieders-Günther bewiesen werden.

### Aufgabe 71.11. (8 Punkte)

Es seien drei Vektoren  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$  gegeben und es sei

$$S = \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in [0, 1]\}$$

das davon erzeugte „Pseudoparallelogramm“. Zeige, dass der Flächeninhalt von  $S$  gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Parallelogramme ist, die von je zwei der beteiligten Vektoren aufgespannt werden.

### Nachtragsaufgabe

Die folgende Aufgabe (Aufgabe 66.4) wurde vereinzelt zu großzügig korrigiert. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und keine fünf Punkte bekommen hat, darf sie erneut einreichen (bitte alte Lösung mit anheften, Korrektur übernimmt Jan Uliczka).

### Aufgabe 71.12. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  und  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  gehört.

## 72. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 72.1.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

( $n \in \mathbb{N}$ ) eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n d\mu$$

gilt.

**Aufgabe 72.2.** Sei

$$f(x, y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y .$$

Berechne die Integrale zum Parameter  $y \in [0, \pi]$  über  $x \in [0, 1]$  und zum Parameter  $x \in [0, 1]$  über  $y \in [0, \pi]$ . Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

**Aufgabe 72.3.** Es sei  $]a, b[$  ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(t) dt$  gleich dem Lebesgue-Integral  $\int_{]a, b[} f d\lambda$  (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.

Mit der vorstehenden Aufgabe ist jetzt die folgende Klausuraufgabe (zu Mathematik II) einfach zu lösen.

**Aufgabe 72.4.** Es sei

$$f : ]0, 1] \longrightarrow [0, \infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty[ \longrightarrow ]0, 1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral  $\int_0^1 f(t) dt$  existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty f^{-1}(y) dy$  existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 72.5.** (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge  $x_n = \sin(n\frac{\pi}{4})$ . Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

**Aufgabe 72.6.** (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

**Aufgabe 72.7.** (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge  $f_n(x) = \sin(nx)$  auf  $[0, \pi]$ .

**Aufgabe 72.8.** (5 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante  $h \geq |f_n|$  nicht gilt.

**Aufgabe 72.9.** (4 Punkte)

Zeige, dass die Fakultätsfunktion  $\text{Fak}(x)$  beliebig oft differenzierbar ist mit den Ableitungen

$$\text{Fak}^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^x e^{-t} dt.$$

## 73. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 73.1.** Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

**Aufgabe 73.2.** Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und  $\pi$  um die  $x$ -Achse gedreht wird.

**Aufgabe 73.3.** Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die  $y$ -Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu  $z = h$  „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von  $h \geq 0$ .

**Aufgabe 73.4.** Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

**Aufgabe 73.5.** Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

**Aufgabe 73.6.** Wo liegt der Fehler in Beispiel 73.7?

**Aufgabe 73.7.** Diskutiere den Wikipediaartikel „Prinzip von Cavalieri“, insbesondere in Hinblick auf die Formulierung:

„Aus dem Prinzip von Cavalieri lässt sich herleiten, dass das Volumen eines 'höhengedehnten' Körpers (bei gleichbleibender Grundfläche) proportional zu seiner Höhe ist. Als Beispiel: Ein Körper, dessen Höhe auf diese Weise verdoppelt wird, kann durch 2 gleiche Ausgangskörper konstruiert werden, indem zuerst alle äquivalenten Schnittflächen zusammengelegt werden und diese in der entsprechenden Reihenfolge des Ausgangskörpers aufgeschichtet werden (beide Ausgangskörper werden quasi ineinandergeschoben).“ (Version vom 29. November 2010).

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 73.8. (5 Punkte)

Es sei  $K$  die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in  $(0, R)$  und dem Radius  $0 < r < R$ . Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich  $K$  um die  $x$ -Achse dreht.

#### Aufgabe 73.9. (6 Punkte)

Es sei  $V$  der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in  $(1, 0)$ , dem Radius 1 und den Eckpunkten  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ . Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man  $V$  um die  $y$ -Achse dreht.

#### Aufgabe 73.10. (5 Punkte)

Es sei  $D$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(3, 4)$ ,  $(5, 5)$  und  $(4, 6)$ . Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man  $D$  um die  $x$ -Achse dreht.

#### Aufgabe 73.11. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in  $(2, 3, 5)$  liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

gegebene Ellipse ist.

#### Aufgabe 73.12. (8 Punkte)

Es sei  $\mu = \varphi_* \lambda^2$  das Bildmaß unter der Multiplikation

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Zeige, dass für jede Borelmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^1(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \lambda^1(T) > 0, \end{cases}$$

gilt.

**Aufwärmataufgaben****Aufgabe 74.1.** Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader  $Q = [a, b] \times [c, d]$ .**Aufgabe 74.2.** Es sei  $G$  der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2.$$

**Aufgabe 74.3.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeige, dass die Menge der Nullmengen von  $M$  ein Mengen-Präring ist.**Aufgabe 74.4.** Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und es sei

$$g : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \int_T g \, d\mu$$

ein Maß auf  $M$  ist.**Aufgabe 74.5.** Welche Dichte besitzt das Borel-Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$  bzgl. dem Borel-Lebesgue-Maß?**Aufgabe 74.6.** Man gebe ein Beispiel für ein Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , das keine Dichte bzgl. dem Borel-Lebesgue-Maß besitzt.**Aufgabe 74.7.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + \sin y, y + \cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von  $|\det (D\varphi)_P|$  auf dem Quadrat  $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Welche Abschätzung ergibt sich daraus für  $\lambda^2(\varphi(Q))$ ?

## Aufgaben zum Abgeben

### Aufgabe 74.8. (6 Punkte)

Es sei  $G$  der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und  $\pi$ . Berechne die Integrale

a)  $\int_G x \, d\lambda^2,$

b)  $\int_G y \, d\lambda^2.$

### Aufgabe 74.9. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion  $f(x, y) = x(\sin x)(\cos xy)$  über dem Rechteck  $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$ .

### Aufgabe 74.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2 + 1)(v^2 + v + 1)}.$$

Für welche Quadrate  $Q = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$  der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

### Aufgabe 74.11. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von  $|\det(D\varphi)_P|$  auf den beiden Quadraten  $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  und  $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$ . Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für  $\lambda^2(\varphi(Q_1))$  und für  $\lambda^2(\varphi(Q_2))$ ?

### Aufgabe 74.12. (6 Punkte)

Wir betrachten das Bildmaß  $\mu = \varphi_*\lambda^n$  zur Abbildung ( $n \geq 1$ )

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

a) Zeige, dass  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $\mathbb{R}$  ist.

b) Zeige, dass  $\mu$  bzgl.  $\lambda^1$  die Dichte

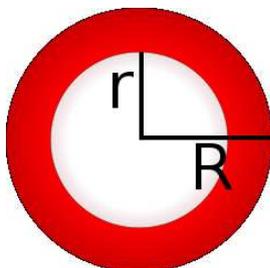
$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \frac{\beta_n}{n} t^{n-1} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

besitzt, wobei  $\beta_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

## 75. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 75.1.** Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



**Aufgabe 75.2.** Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

**Aufgabe 75.3.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y)$$

flächentreu ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 75.4.** (5 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum, es sei

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative integrierbare Funktion und sei  $g\mu$  das Maß zur Dichte  $g$ . Zeige, dass für jede messbare Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$\int_M f d(g\mu) = \int_M fg d\mu$$

gilt.

**Aufgabe 75.5.** (5 Punkte)

Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, und es seien

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare nichtnegative integrierbare Funktionen mit den zu diesen Dichten gehörigen Maßen  $g\mu$  und  $h\nu$ . Zeige, dass auf  $M \times N$  das Produktmaß  $(g\mu) \otimes (h\nu)$  mit dem Maß zur Dichte

$$gh : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x)h(y),$$

bezüglich  $\mu \otimes \nu$  übereinstimmt.

**Aufgabe 75.6.** (4 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq 1\}$  für das Bildmaß  $\mu = \varphi_*\lambda^2$  unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

**Aufgabe 75.7.** (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graph) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

## 76. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 76.1.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (u, v) \longmapsto \left( \frac{-u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Auf einer Kugeloberfläche  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  nennt man einen Durchschnitt von  $K$  mit einer Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt läuft, einen *Großkreis* auf  $K$ . Zwei Punkte  $P, Q \in K$ ,  $P \neq Q$ , heißen *antipodal*, wenn ihre Verbindungsgerade durch den Kugelmittelpunkt läuft.

**Aufgabe 76.2.** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  eine Kugeloberfläche. Zeige, dass je zwei nicht antipodale Punkte  $P, Q \in K$ ,  $P \neq Q$ , auf genau einem Großkreis von  $K$  liegen.

**Aufgabe 76.3.** Zeige, dass ein offener Ball  $U(P, r) \subseteq \mathbb{R}^n$   $C^\infty$ -diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 76.4.** (3 Punkte)

Bestimme das Bild der Großkreise durch die beiden Pole auf der Einheitskugel unter der stereographischen Projektion vom Nordpol aus.

**Aufgabe 76.5.** (5 Punkte)

Zeige, dass auf der Einheitskugel  $K \subset \mathbb{R}^3$  durch folgende Zuordnung eine Metrik festgelegt wird. Für  $P, Q \in K$  ist  $d(P, Q)$  die Länge des (kürzeren) Verbindungsweges von  $P$  nach  $Q$  auf dem durch diese Punkte festgelegten Großkreis (berücksichtige auch die Fälle  $P = Q$  und  $P, Q$  antipodal).

**Aufgabe 76.6.** (8 Punkte)

Wir fixieren die beiden Punkte  $N = (0, 0, 1)$  und  $P = (1, 0, 0)$  auf der Einheitskugel  $K$ . Es sei  $G$  die Verbindungsgerade und es sei  $H$  die zu  $G$  senkrechte Ebene durch  $N$ . Führe auf  $H$  einen parametrisierten Einheitskreis  $E$  mit  $N$  als Mittelpunkt ein. Bestimme zu  $S \in E$  die Länge des (kürzeren) Weges von  $N$  nach  $P$  auf demjenigen Kreis, der durch den Schnitt von  $K$  mit der durch  $N, P$  und  $S$  gegebenen Ebene festgelegt ist.

### Aufgabe zum Hochladen

**Aufgabe 76.7.** (6 Punkte)

Erstelle eine Animation, die die geometrischen Objekte aus Aufgabe 76.6 darstellt.

## 77. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 77.1.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen auf  $M$ . Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung

$$f \times g : M \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

ist differenzierbar.

(2)  $f + g$  ist differenzierbar.

(3)  $f \cdot g$  ist differenzierbar.

(4) Wenn  $f$  keine Nullstelle besitzt, so ist auch  $f^{-1}$  differenzierbar.

**Aufgabe 77.2.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^* : C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}), f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

**Aufgabe 77.3.** Zeige, dass ein halboffenes Intervall  $[a, b[$  keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 77.4.** Es sei  $I = [0, 1[$  das (nach oben) halboffene Einheitsintervall und  $S^1$  der Einheitskreis. Zeige, dass es eine bijektive stetige Abbildung

$$f : I \longrightarrow S^1$$

gibt, dass aber  $I$  und  $S^1$  nicht homöomorph sind.

**Aufgabe 77.5.** Zeige, dass eine Ellipsoidoberfläche und die Einheitssphäre  $C^\infty$ -diffeomorph sind.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 77.6. (4 Punkte)

Es seien  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen mit  $0 \in V_1, V_2$  und es sei

$$\varphi : U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen  $U_1 \times \{0\}$  und  $U_2 \times \{0\}$  induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$  nach  $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$  ein Diffeomorphismus ist.

#### Aufgabe 77.7. (5 Punkte)

Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die mindestens zwei Elemente besitze. Zeige, dass es differenzierbare Funktionen

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit  $f, g \neq 0$ , aber  $fg = 0$ .

#### Aufgabe 77.8. (8 Punkte)

Man gebe eine injektive stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S^2,$$

die (als Abbildung nach  $\mathbb{R}^3$ ) rektifizierbar ist und unendliche Länge besitzt, und für die  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = N$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = S$  gilt.

#### Aufgabe 77.9. (6 Punkte)

Zeige, dass das Achsenkreuz keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

## 78. ARBEITSBLATT



Gar nicht mehr lange!

Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 78.1.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in M$  und  $Q = \varphi(P)$  und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit einem offenen Intervall  $0 \in I$  und  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ . Es seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  im Punkt  $P$  tangential äquivalent. Zeige, dass auch die Verknüpfungen  $\varphi \circ \gamma_1$  und  $\varphi \circ \gamma_2$  tangential äquivalent in  $Q$  sind.

**Aufgabe 78.2.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$  ein Punkt. Wir betrachten die folgende Menge.

$$T = \{(U, f) \mid U \subseteq M \text{ offen, } P \in U, f \in C^1(U, \mathbb{R})\}.$$

Wir betrachten die Relation

$(U, f) \sim (V, g) : \text{ es gibt eine offene Menge } W \text{ mit } P \in W \subseteq U \cap V \text{ mit } f|_W = g|_W.$

- (1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf  $T$  ist.
- (2) Zeige, dass es eine natürliche Ringstruktur auf der Menge der Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation gibt.

**Aufgabe 78.3.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  betrachten wir die Menge  $C^1(U, \mathbb{R})$  der differenzierbaren Funktionen auf  $U$ . Es sei  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung.

- (1) Zeige, dass zu  $V \subseteq U$  offen und  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  auch die Einschränkung  $f|_V$  zu  $C^1(V, \mathbb{R})$  gehört.
- (2) Sei  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ . Zeige, dass  $f = 0$  genau dann ist, wenn sämtliche Einschränkungen  $f|_{U_i} = 0$  sind.
- (3) Es sei eine Familie  $f_i \in C^1(U_i, \mathbb{R})$  von Funktionen gegeben, die die „Verträglichkeitsbedingung“  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$  erfüllen. Zeige, dass es ein  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  gibt mit  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i$ .

**Aufgabe 78.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  eine Menge und

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{T} = \{V \subseteq Y \mid \varphi^{-1}(V) \text{ ist offen in } X\}$$

eine Topologie auf  $Y$  definiert, bzgl. der  $\varphi$  stetig ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe eingeführte Topologie nennt man Bildtopologie.

**Aufgabe 78.5.** Zeige, dass auf dem  $\mathbb{R}^n$  durch

$$P \sim Q, \text{ falls } P - Q \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die Quotientenmenge  $Y = \mathbb{R}^n / \sim = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  sei mit der Bildtopologie zur Quotientenabbildung  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  versehen. Zeige, dass  $Y$  ein Hausdorff-Raum ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 78.6.** (6 Punkte)

Es seien zwei Punkte  $P$  und  $Q$  auf der Einheitskugel gegeben. Zeige, dass es einen Diffeomorphismus der Kugel in sich gibt, der  $P$  in  $Q$  überführt.

**Aufgabe 78.7.** (8 Punkte)

Der Quotientenraum  $Y = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  sei mit der Bildtopologie versehen. Definiere auf  $Y$  eine Mannigfaltigkeitsstruktur durch geeignete Karten. Zeige, dass die Quotientenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$$

eine differenzierbare Abbildung ist, und dass die Tangentialabbildung in jedem Punkt ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 78.8.** (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$ . Zeige, dass für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit  $\gamma(0) = P$  und  $a \in \mathbb{R}$  im Tangentialraum  $T_P M$  die Beziehung

$$a[\gamma] = [\lambda]$$

gilt, wobei  $\lambda$  durch  $\lambda(t) := \gamma(at)$  definiert sei.

**Aufgabe 78.9.** (6 Punkte)

Es sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit und  $P \in M$ . Definiere für  $C^k$ -Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$  eine Äquivalenzrelation, die in einer (jeder) Karte die Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  berücksichtigt. Wie sehen einfache Vertreter dieser Äquivalenzrelation aus? Definiere eine Vektorraumstruktur auf der Quotientenmenge und bestimme die Dimension.

**Aufgabe 78.10.** (5 Punkte)

Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $P \in M$ . Wir sagen, dass zwei Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$  den gleichen *Kurvenkeim* definieren, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt mit

$$\gamma_1|_{[-\epsilon, \epsilon]} = \gamma_2|_{[-\epsilon, \epsilon]}.$$

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kurven  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = P$  (und mit verschiedenen offenen Intervallen  $0 \in I$ ) definiert.
- Zeige, dass differenzierbare Kurven, die den gleichen Kurvenkeim repräsentieren, auch den gleichen Tangentialvektor repräsentieren.

## 79. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 79.1.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte (also  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen). Zeige, dass  $\alpha$  ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 79.2.** Es seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Zeige, dass  $\varphi$  genau dann differenzierbar ist, wenn alle Einschränkungen  $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$  differenzierbar sind.

**Aufgabe 79.3.** Zeige, dass zu  $m \leq n$  die Einbettung des Unterraumes  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$ , die durch  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  gegeben ist, beliebig oft differenzierbar ist.

**Aufgabe 79.4.** Man gebe ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , die keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 79.5.** Es seien  $M$  und  $N$  zwei disjunkte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^2$ . Zeige, dass deren Vereinigung  $M \cup N$  ebenfalls eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, und dass diese Aussage ohne die Voraussetzung der Disjunktheit nicht gilt.

**Aufgabe 79.6.** Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass der Graph  $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Aufgabe 79.7.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass diese Projektionsabbildung stetig ist.

**Aufgabe 79.8.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 79.9. (8 Punkte)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}_+$ .

a) Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid ux^m + vy^n = 1\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^4$  ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, u, v) \longmapsto (x, y),$$

differenzierbar und in jedem Punkt  $P \in M$  regulär ist.

c) Beschreibe die Fasern von  $\varphi$ .

#### Aufgabe 79.10. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (x^2, x^3).$$

a) Zeige, dass diese Abbildung differenzierbar und injektiv ist.

b) Zeige, dass  $\varphi$  nicht in jedem Punkt regulär ist.

c) Zeige, dass das Bild von  $\varphi$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ist, aber keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  ist.

#### Aufgabe 79.11. (4 Punkte)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbare Abbildung und  $M$  die Faser über  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Es sei vorausgesetzt, dass das totale Differential in jedem Punkt dieser Faser surjektiv sei. Zeige, dass für  $P \in M$  der Tangentialraum im Sinne von Definition 51.5 mit dem Tangentialraum der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  im Punkt  $P$  übereinstimmt.

#### Aufgabe 79.12. (5 Punkte)

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass  $TM$  selbst in natürlicher Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 80.1.** Zeige, dass das Produkt  $M \times N$  von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  selbst wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 80.2.** Es seien  $M_1 \subseteq N_1$  und  $M_2 \subseteq N_2$  abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten. Zeige, dass ihr Produkt  $M_1 \times M_2$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $N_1 \times N_2$  ist.

**Aufgabe 80.3.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\varphi : M \longrightarrow M \times M, x \longmapsto (x, x),$$

die Diagonalabbildung in das Produkt  $M \times M$ . Zeige, dass die Diagonale  $\varphi(M)$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 80.4.** Betrachte die Kreislinie  $S^1$ . Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf  $S^1$ , also ein neutrales Element  $P \in S^1$ , eine differenzierbare Abbildung

$$n : S^1 \longrightarrow S^1, x \longmapsto n(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$T = S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass  $S^1$  mit diesen Daten zu einer kommutativen Gruppe wird.

**Aufgabe 80.5.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M$  eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

und

$$\cdot : K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in K$ . Zeige, dass  $M$  ein  $K$ -Vektorraum ist.

**Aufgabe 80.6.** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeige die Gleichheit  $V = \bigwedge^1 V$ .

**Aufgabe 80.7.** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $n > m$ . Zeige  $\bigwedge^n V = 0$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 80.8.** (4 Punkte)

Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels  $T_{S^1}$  der 1-Sphäre  $S^1$  mit dem Produkt  $S^1 \times \mathbb{R}$  gibt.

In der folgenden Aufgabe wird der Begriff eines  $R$ -Moduls verwendet (das ist eine direkte Verallgemeinerung des Vektorraumbegriffes).

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $M = (M, +, 0)$  eine kommutative Gruppe. Man nennt  $M$  einen  $R$ -Modul, wenn es eine Operation

$$R \times M \longrightarrow M, (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v,$$

gibt, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien  $r, s \in R$  und  $u, v \in M$  beliebig):

- (1)  $r(su) = (rs)u$ ,
- (2)  $r(u + v) = (ru) + (rv)$ ,
- (3)  $(r + s)u = (ru) + (su)$ ,
- (4)  $1u = u$ .

**Aufgabe 80.9.** (4 Punkte)

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $R = C^1(M, \mathbb{R})$  der Ring der differenzierbaren Funktionen auf  $M$  und sei  $F$  die Menge aller Vektorfelder auf  $M$ .

a) Definiere eine Addition auf  $F$  derart, dass  $F$  zu einer kommutativen Gruppe wird.

b) Definiere eine Skalarmultiplikation

$$R \times F \longrightarrow F, (f, s) \longmapsto fs,$$

derart, dass  $F$  zu einem  $R$ -Modul wird.

**Aufgabe 80.10.** (5 Punkte)

Sei  $0 < r < R$  und sei

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow T, (\varphi, \psi) \longmapsto ((R + r \cos \psi) \cos \varphi, (R + r \cos \psi) \sin \varphi, r \sin \psi)$$

eine Bijektion ist.

**Aufgabe 80.11.** (6 Punkte)

Sei  $T$  ein Torus und seien  $P, Q \in T$  zwei Punkte. Zeige, dass es eine gemeinsame Kartenumgebung  $P, Q \in U \subseteq T$  gibt derart, dass die Kartenabbildung

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Homöomorphie mit  $V = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  ergibt.

## 81. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 81.1.** Man gebe ein Beispiel einer surjektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

nicht surjektiv ist.

**Aufgabe 81.2.** Man gebe ein Beispiel einer injektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

nicht injektiv ist.

**Aufgabe 81.3.** Zeige, dass

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^4$  ist.

**Aufgabe 81.4.** Drücke das Dachprodukt  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  in der Standardbasis von  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$  aus.

Die in der folgenden Aufgabe konstruierte Basis des Dualraums heißt *Dualbasis*.

**Aufgabe 81.5.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ . Es sei

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K)$$

der sogenannte *Dualraum* zu  $V$ . Zeige, dass auf  $V^*$  die Koordinatenfunktionen  $v_1^*, \dots, v_n^*$ , die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von  $V^*$  bilden.

**Aufgabe 81.6.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es seien  $f_1, \dots, f_k \in V^*$ . Zeige, dass die Abbildung

$$V \times \dots \times V \longrightarrow K, (v_1, \dots, v_k) \longmapsto \det(f_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k},$$

multilinear und alternierend ist.

**Aufgabe 81.7.** Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu  $\wedge^2 \varphi$  bzgl. den Standardbasen der Dachprodukte.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 81.8.** (2 Punkte)

Drücke das Dachprodukt  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  in der Standardbasis von  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$  aus.

**Aufgabe 81.9.** (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis von  $\wedge^3 \mathbb{R}^4$  aus.**Aufgabe 81.10.** (6 Punkte)Wir betrachten das zweite Dachprodukt  $\wedge^2 \mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis  $e_i \wedge e_j$ ,  $i < j$ , und der zugehörigen Dualbasis  $\varphi_{ij} = e_{ij}^*$ . Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \wedge^2 \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = \sqrt{\sum_{i < j} (\varphi_{ij}(x))^2},$$

die Eigenschaft besitzt, dass  $\varphi(v \wedge w)$  mit dem Flächeninhalt des von  $v$  und  $w$  im  $\mathbb{R}^n$  aufgespannten Parallelotops übereinstimmt.**Aufgabe 81.11.** (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu  $\wedge^2 \varphi$  bzgl. den Standardbasen der Dachprodukte.**Aufgabe 81.12.** (4 Punkte)Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es seien  $u_1, \dots, u_n \in V$ . Zeige, dass es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\wedge^k V \longrightarrow \wedge^{k+n} V$$

mit  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_n$  gibt.

## 82. ARBEITSBLATT

## Aufwärmaufgaben



**Aufgabe 82.1.** Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

**Aufgabe 82.2.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei  $V \neq 0$  aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

**Aufgabe 82.3.** Sei  $V \neq 0$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Zeige, dass wenn man einen Vektor  $v_i$  durch sein Negatives  $-v_i$  ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

**Aufgabe 82.4.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf  $V$  repräsentierende Basis  $v_1, \dots, v_n$  gibt, deren Bildvektoren  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  die Orientierung auf  $W$  repräsentieren.

**Aufgabe 82.5.** Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 82.6.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass  $X$  kompakt ist.

**Aufgabe 82.7.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und es seien  $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$  kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung  $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$  kompakt ist.

**Aufgabe 82.8.** Es sei  $X$  ein kompakter Raum und es sei  $Y \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass  $Y$  ebenfalls kompakt ist.

**Aufgabe 82.9.** Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  nicht überdeckungskompakt ist.

**Aufgabe 82.10.** Wir betrachten die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass  $\mathbb{N}$  abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

**Aufgabe 82.11.** Es sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass  $X$  vollständig ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 82.12.** (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von  $\mathbb{R}^3$  und die dadurch induzierte Basis

$$\mathbf{v} = v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3$$

von  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ . Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis  $\mathbf{v}$  und der Standardbasis  $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$ .

**Aufgabe 82.13.** (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 82.14.** (6 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf  $V$ , aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt

**Aufgabe 82.15.** (4 Punkte)

Zeige, dass die 1-Sphäre  $S^1$  eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 82.16.** (4 Punkte)

Es sei  $X$  ein Hausdorffraum und es sei  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei  $Y$  kompakt. Zeige, dass  $Y$  abgeschlossen in  $X$  ist.

**Aufgabe 82.17.** (4 Punkte)

Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und es sei

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei  $X$  kompakt. Zeige, dass das Bild  $\varphi(X) \subseteq Y$  ebenfalls kompakt ist.

## 83. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 83.1.** Berechne die Tangentialabbildung  $T\varphi$  zu

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2y - 3xz^3 + y^2, x \sin y - e^{yz})$$

unter Verwendung der Identifizierungen  $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  und  $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 83.2.** Es seien  $M_1$  und  $M_2$  orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass dann auch das Produkt  $M_1 \times M_2$  eine orientierte Mannigfaltigkeit ist (wobei die Orientierung von der Ordnung auf  $\{1, 2\}$  abhängt).

Es seien  $M$  und  $N$  orientierte Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Diese heißt  $\varphi$  *orientierungstreu*, wenn für jeden Punkt  $P \in M$  die Tangentialabbildung

$$T\varphi : T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N$$

bijektiv und orientierungstreu ist.

**Aufgabe 83.3.** Zeige, dass die antipodale Abbildung

$$\varphi : S^1 \longrightarrow S^1, P \longmapsto -P,$$

orientierungstreu ist.

**Aufgabe 83.4.** Es seien  $M_1$  und  $M_2$  orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$\varphi : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2 \times M_1, (P, Q) \longmapsto (Q, P),$$

bzgl. den jeweiligen Produktorientierungen nicht orientierungstreu sein muss.

**Aufgabe 83.5.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel  $T^*M$ . Zeige, dass man auf  $\bigwedge^k T^*M$  für jedes  $k$  eine Topologie erklären kann, bei der für jede Karte  $\alpha : U \rightarrow V$  die Abbildung

$$\bigwedge^k T^*U \longrightarrow \bigwedge^k T^*V \cong V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n^*}$$

eine Homöomorphie ist.

Damit kann man von stetigen und auch von messbaren Differentialformen sprechen.

**Aufgabe 83.6.** Es sei  $M$  eine  $C^2$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel  $T^*M$ . Zeige, dass  $\bigwedge^k T^*M$  für jedes  $k$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 83.7.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{E}^k(M)$  die Menge der  $k$ -Formen auf  $M$ . Zeige, dass  $\mathcal{E}^k(M)$  ein  $R$ -Modul zu  $R = C^1(M, \mathbb{R})$  ist.

**Aufgabe 83.8.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $P \in M$  ein Punkt und  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $v \in T_P M$  ein Tangentialvektor, der durch einen differenzierbaren Weg

$$\gamma : ] - \delta, \delta[ \longrightarrow M$$

mit  $\gamma(0) = P$  repräsentiert werde. Zeige die Gleichheit

$$(df)(P, v) = (f \circ \gamma)'(0).$$

**Aufgabe 83.9.** Es sei  $i : M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass für eine differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$i^*(df) = d(f \circ i)$$

gilt.

**Aufgabe 83.10.** Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (u, v) \longmapsto (u^2, v^3 - u),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2} dx \wedge dy.$$

Bestimme die zurückgezogene Differentialform  $\varphi^* \omega$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 83.11.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $n$  und sei das Produkt  $V^n = V \times \dots \times V$  mit der Produkttopologie versehen. Es sei  $I$  ein reelles Intervall und

$$\varphi : I \longrightarrow V^n$$

eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

für jedes  $t \in I$  eine Basis von  $V$  ist. Zeige, dass sämtliche Basen  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , die gleiche Orientierung auf  $V$  repräsentieren.

**Aufgabe 83.12.** (6 Punkte)

Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentenbündel  $T^*M$ . Es sei  $\omega$  eine  $k$ -Differentialform, also eine Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M$$

mit  $\omega(P) \in \bigwedge^k T_P^*M$  für alle  $P \in M$ , wobei dieses Dachprodukt mit der natürlichen Topologie (siehe Aufgabe 83.5) versehen sei. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\omega$  ist stetig.
- (2) Für jede Karte  $\alpha : U \rightarrow V$  mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und mit der lokalen Darstellung  $\alpha_*\omega = \sum_{J, \#(J)=k} f_J dx_J$  sind die Funktionen  $f_J$  stetig.
- (3) Es gibt eine offene Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit Kartengebieten  $U_i$  derart, dass in den lokalen Darstellungen  $\alpha_{i*}\omega = \sum_{J, \#(J)=k} f_{iJ} dx_J$  die Funktionen  $f_{iJ}$  stetig sind.

**Aufgabe 83.13.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $L$  und  $M$ . Es seien  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  und  $\tau \in \mathcal{E}^\ell(M)$  Differentialformen auf  $M$ . Zeige die Gleichung

$$\varphi^*(\omega \wedge \tau) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau.$$

**Aufgabe 83.14.** (4 Punkte)

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\longrightarrow N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}, \\ (u, v, w) &\longmapsto (uvw, u^2 - vw^5, u^2 + v^2 + w^2), \end{aligned}$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + \frac{xy}{z} dx \wedge dz + (xe^y - z) dy \wedge dz$$

auf  $N$ . Bestimme die zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\omega$ .

**Aufgabe 83.15.** (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der Gleichungskette im Beweis zu Lemma 83.8.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile  
[[/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort  
{{:Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Begründungsfenster}}  
ein.
- (3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleichzeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort  
[[Ihr Benutzername/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
hinschreiben.

#### 84. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 84.1.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei  $I$  abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

- a) Eine Teilmenge  $T \subseteq X$  ist genau dann eine Borelmenge, wenn  $T \cap U_i$  eine Borelmenge ist für jedes  $i \in I$ .
- b) Ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  ist durch die Einschränkungen  $\mu_i = \mu|_{U_i}$  eindeutig bestimmt.
- c) Es sei für jedes  $i \in I$  ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu_i$  auf  $U_i$  gegeben. Für jedes Paar  $i, j \in I$  sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} = \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $\sigma$ -endliches Maß auf  $X$  mit  $\mu|_{U_i} = \mu_i$ .

**Aufgabe 84.2.** Zeige, dass das zu einer positiven Volumenform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in der Definition 84.3 eingeführte Volumenmaß ein  $\sigma$ -endliches Maß ist.

**Aufgabe 84.3.** Es sei

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

die Standard-Volumenform auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  die Gleichheit

$$\int_T \omega = \int_T d\lambda^n = \lambda^n(T)$$

gilt.

**Aufgabe 84.4.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer positiven Volumenform  $\omega$ . Es sei  $T \subseteq M$  messbar und  $N \subseteq M$  eine Nullmenge. Zeige, dass

$$\int_T \omega = \int_{T \setminus N} \omega$$

gilt.

**Aufgabe 84.5.** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  positive Volumenformen auf  $M$ . Zeige, dass für jede messbare Teilmenge  $T \subseteq M$  und  $a, b \in \mathbb{R}_+$  die Beziehung

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2$$

gilt.

**Aufgabe 84.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Zeige, wie man unter Bezug auf Karten „Nullmengen“ von  $M$  erklären kann, ohne dass ein Maß gegeben ist. Zeige ferner, dass wenn eine positive Volumenform gegeben ist, diese Nullmengen auch Nullmengen im Sinne der Maßtheorie sind.

**Aufgabe 84.7.** Es seien  $L$  und  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei  $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$  mit der zurückgezogenen Differentialform  $\varphi^*\omega \in \mathcal{E}^1(L)$  und es sei

$$\gamma : I \longrightarrow L$$

eine stetig differenzierbare Kurve ( $I$  ein reelles Intervall). Zeige, dass für die Wegintegrale die Gleichheit

$$\int_\gamma \varphi^*\omega = \int_{\varphi \circ \gamma} \omega.$$

**Aufgabe 84.8.** Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

eine stetig differenzierbare Funktion und es sei  $\omega = g(s)ds$  eine 1-Differentialform auf  $\mathbb{R}$ . Bestimme  $f^*\omega$ .

**Aufgabe 84.9.** Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Differentialformen

- a)  $x dx + y dy$ ,
- b)  $x dx - y dy$ ,
- c)  $y dx + x dy$ ,
- d)  $y dx - x dy$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 84.10.** (4 Punkte)

Zeige, dass die Antipodenabbildung

$$S^2 \longrightarrow S^2, (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z),$$

nicht orientierungstreu ist.

**Aufgabe 84.11.** (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Es sei  $\omega$  eine positive Volumenform auf  $M$  und es sei  $\mu$  das durch diese Volumenform definierte Maß auf  $M$ . Zeige, dass dann jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\leq n - 1$  eine Nullmenge ist.

**Aufgabe 84.12.** (4 Punkte)

Seien  $a, b, c, d, r, s \geq 1$  natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform

$$\omega = x^a y^b dx + x^c y^d dy.$$

**Aufgabe 84.13.** (5 Punkte)

Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform

$$\omega = (y - z^3)dx + x^2dy - xzdz.$$

**Aufgabe 84.14.** (3 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der zweiten Gleichungskette im Beweis zu Lemma 84.2.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile  
[[/Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort  
{{:Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Begründungsfenster}}  
ein.
- (3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleichzeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Gleichung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort  
[[Ihr Benutzername/Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
hinschreiben.

## 85. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben****Aufgabe 85.1.** Wir betrachten eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was ist die kanonische Volumenform auf  $V$ ?

**Aufgabe 85.2.** Wir betrachten eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was besagt die in Lemma 85.3 beschriebene Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Differentialformen in dieser Situation?

**Aufgabe 85.3.** Es sei  $M$  eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die kanonische Volumenform  $\omega$  dadurch festgelegt ist, dass sie in jedem Punkt für eine die Orientierung repräsentierende Orthonormalbasis den Wert 1 besitzt.

**Aufgabe 85.4.** Zeige, dass bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit die Kartenabbildungen

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Isometrie

$$T_P(\alpha) : T_P U \longrightarrow T_{\alpha(P)} V$$

induzieren (wenn  $T_P U$  mit  $\langle -, - \rangle_P$  und  $T_{\alpha(P)} V = \mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt versehen ist).

### Aufgaben zum Abgeben

Bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  definiert man zu einem Tangentialvektor  $v \in T_P M$  die Norm durch  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle_P}$ .

**Aufgabe 85.5.** (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Zuordnung

$$TM \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

stetig ist.

**Aufgabe 85.6.** (6 Punkte)

Wir betrachten die Einheitskugel  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ , wobei die Koordinaten des  $\mathbb{R}^3$  mit  $x, y, z$  bezeichnet seien. Für welche Punkte  $P \in S^2$  bilden die Einschränkungen von  $dx$  und  $dy$  auf  $S^2$  eine Basis des Tangentialraums  $T_P S^2$ .

**Aufgabe 85.7.** (3 Punkte)

Zeige, dass  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  mit der durch die Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^4,$$

gegebenen Bilinearform eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 85.8.** (4 Punkte)

Man gebe für jeden Punkt  $P = (x, y, z)$  der Einheitssphäre  $K$  eine Orthonormalbasis in  $T_P K \subset \mathbb{R}^3$  an (bzgl. der induzierten riemannschen Struktur).

**Aufgabe 85.9.** (6 Punkte)

Im  $\mathbb{R}^3$  sei das Ellipsoid

$$E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 5\}$$

und die Ebene

$$M = \{(x, y, z) \mid 7x - 3y - 2z = 2\}$$

gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Durchschnitts  $M \cap E$ .

**Aufgabe 85.10.** (6 Punkte)

Man erstelle eine Computergraphik, die die in Bemerkung 85.4 beschriebene Situation anhand einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  veranschaulicht.

## 86. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben****Aufgabe 86.1.** Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

eine Linearform. Es sei  $M$  der Graph dieser Funktion, den wir als riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Zeige, dass zwischen den Volumina entsprechender Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und des Graphen eine konstante Beziehung besteht.

**Aufgabe 86.2.** Diskutiere die Rotationsfläche  $S$  zu

$$M = \left\{ \left( \sin \frac{1}{y}, y \right) \mid y > 0 \right\}$$

um die  $x$ -Achse  $A$ . Ist  $S$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3 \setminus A$ ? Ist die Menge  $S$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^3$ ? Ist der Abschluss von  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  eine Mannigfaltigkeit?

**Aufgabe 86.3.** Bestätige, dass die in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 angegebenen Abbildungen ihr Bild auf der Einheitssphäre haben und bis auf eine Nullmenge surjektiv sind.

**Aufgabe 86.4.** Bestimme die (partiell definierten) Umkehrabbildungen zu den in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 angegebenen Abbildungen.

**Aufgabe 86.5.** Zeige, dass Längenkreise und Breitenkreise auf der Erdkugel senkrecht aufeinander stehen.

**Aufgabe 86.6.** Wie lange ist der 30-ste Breitenkreis auf der Erde (man setze den Erdradius mit 6370 km an).

**Aufgabe 86.7.** Bestimme das Infimum und das Supremum der Länge der Bilder der Großkreise auf der in Beispiel 86.5 beschriebenen Karte.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 86.8.** (5 Punkte)

Wir betrachten den Graph  $M$  der Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y + x^2,$$

als riemannsche Mannigfaltigkeit. Berechne den Flächeninhalt des Graphen oberhalb des Quadrats  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

**Aufgabe 86.9.** (5 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

die Parabel, also der Graph der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

Zeige, dass die zugehörige Rotationsfläche um die  $x$ -Achse keine Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 86.10.** (4 Punkte)

Man stelle eine Kugeloberfläche als Rotationsfläche dar und berechne damit den Inhalt der Kugeloberfläche.

**Aufgabe 86.11.** (4 Punkte)

Man stelle einen Torus als Rotationsfläche dar und berechne damit seinen Flächeninhalt.

**Aufgabe 86.12.** (6 Punkte)

Bestimme den „Abstand“ zwischen Osnabrück und Bangalore (den Erdradius mit 6370 km ansetzen) in den beiden folgenden Sinnen.

- Entlang der Erdoberfläche (Luftlinie).
- Durch die Erde (Maulwurfslinie).

**Aufgabe 86.13.** (6 Punkte)

Wie lange ist das Bild des 30-sten Breitenkreises auf den in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 beschriebenen Karten (man setze den Erdradius mit 6370 km an)?

## 87. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 87.1.** Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = (x^2 - y^3)dx + x^3y^2dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 87.2.** Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2dx + yzdy + x^3dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 87.3.** Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xdx \wedge dy + xy^2zdy \wedge dz + xe^ydx \wedge dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 87.4.** Es seien  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^*f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei  $\psi^*$  das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

**Aufgabe 87.5.** Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2x - \sin y)dx - x \cos y dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$  geschlossen und auch exakt ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 87.6.** (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2z^3dx + xyzdy + x^3yz^4dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 87.7.** (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xy^2dx \wedge dy + (x^3 - y^2z^4)dy \wedge dz + \sin(xy) dx \wedge dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 87.8.** (5 Punkte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und es seien  $\omega_1, \dots, \omega_r$  Differentialformen auf  $U$ , wobei  $\omega_i$  eine  $k_i$ -Differentialform sei. Finde und beweise eine Formel für

$$d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r).$$

**Aufgabe 87.9.** (5 Punkte)

Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2xy + 3x^2 - ye^{xy})dx + (x^2 - xe^{xy} + 8y)dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$  geschlossen und auch exakt ist.

**Aufgabe 87.10.** (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der ersten Gleichungskette im Beweis zu Lemma 87.2.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile  
[[/Differentialform/Äußere Ableitung/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).

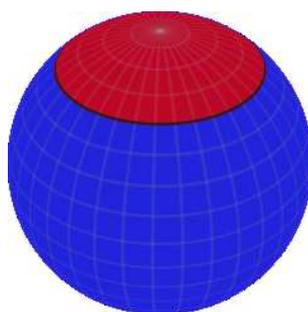
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort  
 $\{\{:\text{Differentialform}/\text{Äußere Ableitung}/\text{Vergleichskette}/\text{Begründungsfenster}\}\}$   
 ein.
- (3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleichzeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort  
 $[[\text{Ihr Benutzername}/\text{Differentialform}/\text{Äußere Ableitung}/\text{Vergleichskette}/\text{Einzelbegründungen}]]$   
 hinschreiben.

## 88. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 88.1.** Beschreibe diverse Kleidungsstücke als zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

**Aufgabe 88.2.** Zeige, dass sowohl das blaue als auch das rote Oberflächenstück einschließlich der Begrenzungslinie eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Was ist der Rand? Sind die beiden Mannigfaltigkeiten diffeomorph? Gibt es eine einfachere dazu diffeomorphe Mannigfaltigkeit?



**Aufgabe 88.3.** Welche der folgenden Funktionen

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

lassen sich differenzierbar in den Randpunkt 0 fortsetzen.

- (1)  $x^3 + \sin^3 x - e^{-x}$ ,  
 (2)  $\frac{1}{x}$ ,

- (3)  $\sin \frac{1}{x}$ ,
- (4)  $x \sin \frac{1}{x}$ ,
- (5)  $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ ,
- (6)  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ .

**Aufgabe 88.4.** Es sei  $H \subset \mathbb{R}^n$  ein Halbraum. Es sei  $Q \in H$  ein Punkt und  $Q \in U \subseteq H$ , wobei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  sei. Zeige, dass  $Q$  kein Randpunkt von  $H$  ist.

**Aufgabe 88.5.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Was kann man über das Produkt  $M \times N$  sagen?

**Aufgabe 88.6.** Die abgeschlossene Kreisscheibe  $B(0, 1)$  trage die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^2$ . Läuft die durch die äußere Normale festgelegte Orientierung auf dem Rand (also auf dem Einheitskreis) mit dem oder gegen den Uhrzeigersinn?

**Aufgabe 88.7.** Definiere die Begriffe *Diffeomorphismus*, *totales Differential* und *höhere Ableitungen* für Halbräume (bzw. offene Teilmengen davon).

**Aufgabe 88.8.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Unter einem *differenzierbaren Halbweg* verstehen wir jede differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [-\epsilon, 0] \longrightarrow M$$

(mit  $\epsilon > 0$ ). Definiere, wann zwei Halbwege mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P \in M$  *tangential äquivalent* sind, und zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation gegeben ist. Was kann man über die Quotientenmenge sagen?

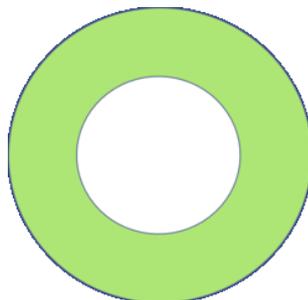
### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 88.9.** (4 Punkte)

Man gebe für den Kreisring

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$$

explizit Karten an, die zeigen, dass  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

**Aufgabe 88.10.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$  und der Quadrant  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  homöomorph sind.

**Aufgabe 88.11.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$  und der Quadrant  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  nicht diffeomorph sind.

(Was ist hierbei der geeignete Diffeomorphiebegriff?)

**Aufgabe 88.12.** (6 Punkte)

Es sei  $M = B(0, 1) \setminus \{(0, 1), (0, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ , also die abgeschlossene Kreisscheibe, aus der man zwei Randpunkte herausgenommen hat. Es sei  $N = ]-1, 1[ \times ]-1, 1]$  das Produkt eines offenen und eines abgeschlossenen Intervalls. Zeige, dass  $M$  und  $N$  diffeomorphe Mannigfaltigkeiten mit Rand sind.

**Aufgabe 88.13.** (4 Punkte)

Es seien  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und es sei

$$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Homöomorphie zwischen  $V_1 \cap H$  und  $V_2 \cap H$  induziert und damit auch zwischen  $V_1 \cap \partial H$  und  $V_2 \cap \partial H$  ( $H$  bezeichnet den Halbraum und  $\partial H$  seinen Rand). Zeige, dass die Einschränkung auf den Rand ebenfalls ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 88.14.** (4 Punkte)

Die abgeschlossene Einheitskugel  $B(0, 1)$  trage die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^3$ . Bestimme, ob die beiden Tangentenvektoren  $(2, 1, 0)$  und  $(3, -1, 0)$  am Nordpol  $(0, 0, 1)$  die durch die äußere Normale induzierte Orientierung auf dem Rand (also auf der Einheitskugel) repräsentieren oder nicht?

## 89. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 89.1.** Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  an.

**Aufgabe 89.2.** Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für den  $\mathbb{R}^n$  an.

**Aufgabe 89.3.** Bestimme die Träger der folgenden Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

- (1) Eine Polynomfunktion.
- (2) Die Sinusfunktion.
- (3) Die Exponentialfunktion.
- (4) Die Indikatorfunktion  $e_{\mathbb{Z}}$ .
- (5) Die Indikatorfunktion  $e_{\mathbb{Q}}$ .
- (6) Die Indikatorfunktion  $e_{[a,b]}$ .
- (7) Die Indikatorfunktion  $e_{]a,b[}$ .

**Aufgabe 89.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T \subseteq X$  eine Teilmenge. Zeige, dass der Abschluss von  $T$  gleich dem Träger der Indikatorfunktion  $e_T$  ist.

**Aufgabe 89.5.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung. Wir betrachten die Familie der Indikatorfunktionen

$$e_P, P \in X.$$

Welche Eigenschaften einer (dieser Überdeckung) untergeordneten Partition der Eins erfüllt diese Familie?

**Aufgabe 89.6.** Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung  $A_n = [-n, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , der reellen Zahlen und die offene Überdeckung  $W_n = A_{n+1}^{\circ} \setminus A_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , (es sei  $A_{-1} = \emptyset$ ). Finde eine Überdeckung von  $\mathbb{R}$  mit offenen Intervallen, die die Eigenschaften aus Lemma 89.7 (und seinem Beweis) erfüllt.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 89.7. (3 Punkte)

Es sei  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine kompakte Ausschöpfung eines topologischen Raumes  $X$ . Zeige, dass die Beziehung

$$A_{n+1} \setminus A_n^\circ \subseteq A_{n+2}^\circ \setminus A_{n-1}$$

gilt.

#### Aufgabe 89.8. (4 Punkte)

Man gebe zur offenen Überdeckung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]n, n+3[$$

eine untergeordnete stetige Partition der Eins an.

#### Aufgabe 89.9. (6 Punkte)

Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung

$$A_n = B(0, n), n \in \mathbb{N},$$

des  $\mathbb{R}^2$  und die offene Überdeckung

$$W_n = A_{n+1}^\circ \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

(es sei  $A_{-1} = \emptyset$ ). Finde eine Überdeckung des  $\mathbb{R}^2$  mit offenen Kreisscheiben, die die Eigenschaften aus Lemma 89.7 (und seinem Beweis) erfüllt.

#### Aufgabe 89.10. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum, der keine kompakte Ausschöpfung besitzt.

## 90. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 90.1.** Diskutiere den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung als einen Spezialfall des Satzes von Stokes.

**Aufgabe 90.2.** Es sei  $M$  eine kompakte  $n$ -dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Differentialform auf  $M$ . Zeige

$$\int_M d\omega = 0.$$

Was bedeutet diese Aussage für  $S^1$ ? Wie kann man diese Aussage in diesem Fall über ein Wegintegral beweisen?

**Aufgabe 90.3.** Es sei  $M$  eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei  $\tau$  eine positive Volumenform auf  $M$ . Zeige, dass  $\tau$  nicht exakt ist.

Wie sieht dies ohne die Kompaktheitsvoraussetzung aus?

**Aufgabe 90.4.** Es sei  $D$  das durch  $(0, 2)$ ,  $(1, -1)$  und  $(-2, -1)$  gegebene Dreieck und  $\tau = x^2 y dx \wedge dy$  eine 2-Differentialform auf  $D$ . Finde eine Stammform für  $\tau$  und berechne damit  $\int_D \tau$  durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

**Aufgabe 90.5.** Man mache sich klar, dass der Satz von Green nicht behauptet, dass der Flächeninhalt eines umrandeten Gebiets im  $\mathbb{R}^2$  nur von der Länge des Randes abhängt.

**Aufgabe 90.6.** Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem nichtleeren Rand. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$M \longrightarrow \partial M$$

gibt.

**Aufgabe 90.7.** Es sei  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) ein Halbraum. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : H \longrightarrow \partial H$$

gibt, deren Einschränkung auf  $\partial H$  die Identität ist.

Wie sieht das bei  $n = 0$  aus?

**Aufgabe 90.8.** Zeige, dass es auf einem Annulus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 90.9. (4 Punkte)

Es sei  $D$  das durch  $(0, 2)$ ,  $(1, -1)$  und  $(-2, -1)$  gegebene Dreieck und  $\tau = (3x^2y^5 - x \sin y)dx \wedge dy$  eine 2-Differentialform auf  $D$ . Finde eine Stammform für  $\tau$  und berechne damit  $\int_D \tau$  durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

#### Aufgabe 90.10. (6 Punkte)

Wir betrachten den Würfel

$$Q = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = dx \wedge dy + ydx \wedge dz + x^2y^2z^2dy \wedge dz.$$

Berechne  $d\omega$  und die beiden Integrale  $\int_{\partial Q} \omega$  und  $\int_Q d\omega$  (getrennt voneinander).

#### Aufgabe 90.11. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe über ein geeignetes Wegintegral.

#### Aufgabe 90.12. (2 Punkte)

Zeige, dass es auf einem Torus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

#### Aufgabe 90.13. (3 Punkte)

Es sei  $B$  die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und  $K$  der obere Kreishalbbogen. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

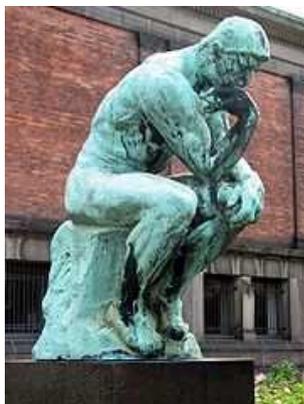
$$\varphi : B \longrightarrow K$$

gibt, deren Einschränkung auf  $K$  die Identität ist.

#### Aufgabe 90.14. (3 Punkte)

Es seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| \leq 1$  und  $\|w\| = 1$ . Bestimme  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\|v + aw\| = 1$ .

## REFLEXIONSAUFGABEN



Diese Aufgaben sind Reflexionsaufgaben. Es geht dabei jeweils um einen bestimmten Aspekt, der sich durch die Mathematik III-Vorlesung zieht. Es kann zu *einem* gewählten Thema eine Ausarbeitung in Form eines schriftlichen Essays im Umfang von ca. 3-4 Seiten bis zum 25. März 2011 abgegeben werden (Postkasten des Dozenten). Es soll dabei gezeigt werden, dass man durchgängige Prinzipien erkennen bzw. Querverbindung zu anderen Bereichen herstellen konnte. Es können maximal 10 Punkte erreicht werden.

**Aufgabe 1.1.** Unendlicher als nur unendlich - der Mächtigkeitsbegriff.

**Aufgabe 1.2.** Maßtheorie - was können wir messen?

**Aufgabe 1.3.** Die Kunst des Integrierens in beliebiger Dimension.

**Aufgabe 1.4.** Das Cavalieri-Prinzip und seine maßtheoretische Bedeutung.

**Aufgabe 1.5.** Die Transformationsformel - ihre Bedeutung für die Maßtheorie und für Mannigfaltigkeiten.

**Aufgabe 1.6.** Meine Lieblingsmannigfaltigkeit.

**Aufgabe 1.7.** Mannigfaltigkeiten - wozu ist das überhaupt gut?

**Aufgabe 1.8.** Der Satz über implizite Abbildungen - und was das mit Mannigfaltigkeiten zu tun hat.

**Aufgabe 1.9.** Die Erde und ihre Karten.

**Aufgabe 1.10.** Orientierungen auf reellen Vektorräumen und auf Mannigfaltigkeiten.

**Aufgabe 1.11.** Das Tangentialbündel als lineare Approximation einer Mannigfaltigkeit

**Aufgabe 1.12.** Der Satz von Stokes.



**Aufgabe 1.1.** (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine *abzählbare* Menge.
- (2) Eine *Mengenalgebra* auf einer Menge  $M$ .
- (3) Eine *Borelmenge* in einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$ .
- (4) Eine *Ausschöpfung* einer Menge  $M$ .
- (5) Ein *Maß* auf einem Messraum  $(M, \mathcal{A})$  (ohne Bezug auf ein Prämaß).
- (6) Ein *translationsinvariantes* Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ .
- (7) Das *Lebesgue-Integral* zu einer messbaren nichtnegativen Funktion  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  auf einem  $\sigma$ -endlichen Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$ .
- (8) Der *Limes inferior* zu einer reellen Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Aufgabe 1.2.** (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

- (1) Der *Eindeutigkeitsatz für Maße*.
- (2) Die *Formel* für  $\lambda^n(L(S))$  für eine Borelmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  unter einer linearen Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (3) Der *Satz von der majorisierten Konvergenz* (oder *Satz von Lebesgue*).
- (4) Das *Cavalieri-Prinzip* für eine messbare Teilmenge  $T \subseteq M \times N$  zu zwei  $\sigma$ -endlichen Maßräumen  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$ .

**Aufgabe 1.3.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  und die Menge der Abbildungen  $\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$  gleichmächtig sind.

**Aufgabe 1.4.** (6 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{A}$  die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \dots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen  $U_1, \dots, U_n$  und abgeschlossenen Mengen  $A_1, \dots, A_n$  besteht.

**Aufgabe 1.5.** (5 (2+3) Punkte)

Es seien  $M$  und  $N$  zwei abzählbare Mengen, die beide mit der  $\sigma$ -Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt  $\mu$  bzw.  $\nu$ ) versehen seien.

- a) Zeige, dass  $M$  und  $N$   $\sigma$ -endliche Maßräume sind.  
 b) Zeige, dass das Produktmaß  $\mu \otimes \nu$  auf  $M \times N$  ebenfalls das Zählmaß ist.

**Aufgabe 1.6.** (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^3$  erzeugten Parallelotops.

**Aufgabe 1.7.** (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$v = (2, 3, -4) \text{ und } w = (1, -1, 7)$$

im  $\mathbb{R}^3$  erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

**Aufgabe 1.8.** (3 Punkte)

Es sei  $M$  ein Messraum und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

**Aufgabe 1.9.** (10 Punkte)

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke  $[a, b] \times [c, d] \subseteq B(0, 1)$  (mit  $a \leq b$  und  $c \leq d$ ) überdecken lässt.

**Aufgabe 1.10.** (5 Punkte)

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die  $t$ -Achse rotieren lässt.

**Aufgabe 1.11.** (10 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit  $a \leq b$  aus  $\mathbb{R}$ ). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha, f(x) \sin \alpha) \mid x \in [a, b], \alpha \in [0, 2\pi[ \} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

das Volumen 0 besitzt.

**Aufgabe 1.12.** (5 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein endlicher Maßraum und  $A_t, t \in \mathbb{R}$ , eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen  $e_{A_t}$ . Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 72.1 (siehe Anhang) sind erfüllt, welche nicht?

## Anhang

**Satz 72.13.** *Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $E$  ein metrischer Raum und*

$$f : E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

*eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.*

- (1) *Für alle  $t \in E$  ist die Funktion  $x \mapsto f(t, x)$  messbar.*
- (2) *Für alle  $x \in M$  ist die Funktion  $t \mapsto f(t, x)$  stetig in  $t_0 \in E$ .*

- (3) Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit

$$|f(t, x)| \leq h(x)$$

für alle  $t \in E$  und alle  $x \in M$ .

Dann ist die Funktion

$$\varphi : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

wohldefiniert und stetig in  $t_0$ .

### TESTKLAUSUR 1 MIT LÖSUNGEN

#### Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine *abzählbare* Menge.
- (2) Eine *Mengenalgebra* auf einer Menge  $M$ .
- (3) Eine *Borelmenge* in einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$ .
- (4) Eine *Ausschöpfung* einer Menge  $M$ .
- (5) Ein *Maß* auf einem Messraum  $(M, \mathcal{A})$  (ohne Bezug auf ein Prämaß).
- (6) Ein *translationsinvariantes* Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ .
- (7) Das *Lebesgue-Integral* zu einer messbaren nichtnegativen Funktion  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  auf einem  $\sigma$ -endlichen Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$ .
- (8) Der *Limes inferior* zu einer reellen Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Lösung

- (1) Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

- (2) Ein Teilmengensystem  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $M$  heißt *Mengen-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.
- (a) Es ist  $M \in \mathcal{A}$ .
  - (b) Mit  $T \in \mathcal{A}$  gehört auch das Komplement  $M \setminus T$  zu  $\mathcal{A}$ .
  - (c) Für je zwei Mengen  $S, T \in \mathcal{A}$  ist auch  $S \cup T \in \mathcal{A}$ .
- (3) Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann nennt man die von  $\mathcal{T}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen* von  $X$ .
- (4) Eine Folge von Teilmengen  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , in  $M$  mit  $T_n \subseteq T_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  heißt *Ausschöpfung* von  $M$ , wenn  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$  gilt.

- (5) Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *Maß* auf  $M$ , wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen  $T_i, i \in I$ , aus  $\mathcal{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$

- (6) Ein Maß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  und alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$  die Gleichheit

$$\mu(T) = \mu(T + v)$$

gilt.

- (7) Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann heißt

$$\int_M f d\mu = (\mu \otimes \lambda^1)(S(f))$$

das *Lebesgue-Integral* von  $f$  über  $M$  (zum Maß  $\mu$ ).

- (8) Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und es sei  $H$  die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann setzt man

$$\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \inf (H)$$

und nennt diese Zahl den *Limes inferior* der Folge.

### Aufgabe 1.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

- (1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße*.
- (2) Die *Formel* für  $\lambda^n(L(S))$  für eine Borelmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  unter einer linearen Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (3) Der *Satz von der majorisierten Konvergenz* (oder *Satz von Lebesgue*).
- (4) Das *Cavalieri-Prinzip* für eine messbare Teilmenge  $T \subseteq M \times N$  zu zwei  $\sigma$ -endlichen Maßräumen  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$ .

Lösung

- (1) Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein Messraum und es sei  $\mathcal{E}$  ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für  $\mathcal{A}$ . Es seien  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zwei Maße auf  $(M, \mathcal{A})$ , die auf  $\mathcal{E}$  übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung  $M_n \uparrow M$  mit  $M_n \in \mathcal{E}$  und mit  $\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty$ . Dann ist

$$\mu_1 = \mu_2.$$

- (2) Es sei

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  die Beziehung

$$\lambda^n(L(S)) = |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

- (3) Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und es sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen. Es gebe eine messbare integrierbare Funktion

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit  $|f_n(x)| \leq h(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in M$ . Dann ist auch die Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  integrierbar, und es gilt

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu.$$

- (4) Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume. Dann gilt für alle messbaren Teilmengen  $T \subseteq M \times N$  die Beziehung

$$(\mu \otimes \nu)(T) = \int_M \nu(T(x)) \, d\mu(x) = \int_N \mu(T(y)) \, d\nu(y).$$

### Aufgabe 1.3. (6 Punkte)

Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  und die Menge der Abbildungen  $\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$  gleichmächtig sind.

Lösung

Die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  steht in Bijektion zur Abbildungsmenge  $\text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$  durch die Zuordnung  $A \mapsto e_A$ . Daher ist

$$\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \cong \text{Abb}(\mathbb{N}, \text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})) \cong \text{Abb}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0, 1\}).$$

Wegen der Gleichmächtigkeit von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  folgt die Gleichmächtigkeit der Mengen

$$\text{Abb}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0, 1\}) \cong \text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N}).$$

**Aufgabe 1.4.** (6 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{A}$  die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \dots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen  $U_1, \dots, U_n$  und abgeschlossenen Mengen  $A_1, \dots, A_n$  besteht.

## Lösung

Zu der von der Topologie erzeugten Mengenalgebra  $\mathcal{A}$  müssen alle offenen Teilmengen und somit, da eine Mengenalgebra auch unter Komplementen abgeschlossen ist, auch alle abgeschlossenen Teilmengen gehören. Da eine Mengenalgebra mit zwei Teilmengen auch deren Durchschnitt und deren Vereinigung enthält, gehören die angegebenen Mengen zu  $\mathcal{A}$ .

Zur Umkehrung müssen wir zeigen, dass das angegebene Mengensystem eine Mengenalgebra ist, die alle offenen Mengen enthält. Eine offene Menge  $U$  kann man als  $U \cap X$  schreiben und ist daher von der angegebenen Form, da  $X$  selbst abgeschlossen ist. Insbesondere ist der Gesamtraum  $X$  von der angegebenen Form. Sei eine Menge

$$(U_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (U_n \cap A_n)$$

gegeben. Ihr Komplement ist

$$\begin{aligned} & X \setminus ((U_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (U_n \cap A_n)) \\ &= (X \setminus (U_1 \cap A_1)) \cap \dots \cap (X \setminus (U_n \cap A_n)) \\ &= ((X \setminus U_1) \cup (X \setminus A_1)) \cap \dots \cap ((X \setminus U_n) \cup (X \setminus A_n)) \\ &= \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left( \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} (X \setminus A_j) \right). \end{aligned}$$

Hierbei sind die  $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$  jeweils abgeschlossen und die  $\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} (X \setminus A_j)$  jeweils offen, so dass eine Menge in der gewünschten Form vorliegt.

Die Vereinigung von zwei Mengen in der angegebenen Form ist offensichtlich wieder von dieser Form.

**Aufgabe 1.5.** (5 (2+3) Punkte)

Es seien  $M$  und  $N$  zwei abzählbare Mengen, die beide mit der  $\sigma$ -Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt  $\mu$  bzw.  $\nu$ ) versehen seien.

a) Zeige, dass  $M$  und  $N$   $\sigma$ -endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß  $\mu \otimes \nu$  auf  $M \times N$  ebenfalls das Zählmaß ist.

Lösung

a) Wenn  $M$  leer ist, so ist nichts zu zeigen. Es sei

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

surjektiv. Dann ist  $M_n := \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$  eine Ausschöpfung von  $M$  mit endlichen Mengen, die daher endliches (Zähl-)maß besitzen.

b) Das Produktmaß auf  $M \times N$  ist dadurch gekennzeichnet, dass es auf Quadern  $S \times T$  zu Seiten  $S$  und  $T$  mit endlichem Maß das Produkt  $\mu(S) \cdot \nu(T)$  als Wert besitzt. Für einen Punkt  $P = (x, y)$  ist  $\{P\} = \{x\} \times \{y\}$  und daher ist

$$\mu \otimes \nu(\{P\}) = \mu(\{x\}) \cdot \nu(\{y\}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Wegen der Abzählbarkeit von  $M \times N$  ist dadurch das Produktmaß festgelegt und gleich dem Zählmaß auf der Produktmenge.

**Aufgabe 1.6.** (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^3$  erzeugten Parallelotops.

Lösung

Wir berechnen die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

mittels der Regel von Sarrus, d.h. wir betrachten

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\det M = -45 + 96 + 84 + 105 - 48 - 72 = 285 - 165 = 120.$$

Das Volumen ist also 120.

**Aufgabe 1.7.** (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$v = (2, 3, -4) \text{ und } w = (1, -1, 7)$$

im  $\mathbb{R}^3$  erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= 4 + 9 + 16 = 29, \\ \langle v, w \rangle &= 2 - 3 - 28 = -29 \end{aligned}$$

und

$$\langle w, w \rangle = 1 + 1 + 49 = 51.$$

Die Determinante der zugehörigen Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} 29 & -29 \\ -29 & 51 \end{pmatrix} = 29 \cdot 51 - 29 \cdot 29 = 29 \cdot 22 = 638.$$

Daher ist der Flächeninhalt des Parallelogramms gleich  $\sqrt{638}$ .

**Aufgabe 1.8.** (3 Punkte)

Es sei  $M$  ein Messraum und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Lösung

Wir schreiben die Funktion  $\sqrt{f}$  als Hintereinanderschaltung

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, ist sie auch messbar und da die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen wieder messbar ist, ergibt sich die Messbarkeit von  $\sqrt{f}$ .

**Aufgabe 1.9.** (10 Punkte)

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke  $[a, b] \times [c, d] \subseteq B(0, 1)$  (mit  $a \leq b$  und  $c \leq d$ ) überdecken lässt.

## Lösung

Nehmen wir an, es sei  $B(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$  mit abgeschlossenen Rechtecken  $R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] \subseteq B(0, 1)$ . Dies führen wir zu einem Widerspruch. Es sei  $P = (x, y) \in B(0, 1)$  ein Randpunkt der Kreisscheibe, also ein Punkt mit  $x^2 + y^2 = 1$ . Es ist dann  $P \in R_n$  für mindestens ein  $n$ . Wir behaupten, dass  $P$  ein Eckpunkt dieses Rechtecks ist.

Dazu zeigen wir, dass beide Koordinaten  $x$  und  $y$  Seitenkoordinaten des Rechtecks sind. Betrachten wir  $x$  und nehmen wir an,  $x$  sei keine Seitenkoordinate des Rechtecks, also  $a_n < x < b_n$ . Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass sowohl  $(x + \epsilon, y)$  als auch  $(x - \epsilon, y)$  zu  $R_n$  und damit zu  $B(0, 1)$  gehören. Also ist

$$\sqrt{(x \pm \epsilon)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \epsilon^2 \pm 2x\epsilon} = \sqrt{1 + \epsilon^2 \pm 2x\epsilon} \leq 1.$$

Da man das Vorzeichen bei nichtnegativem  $x$  positiv und bei negativem  $x$  negativ wählen kann, steht bei dieser Wahl unter der Wurzel eine Zahl, die größer als 1 ist, was einen Widerspruch bedeutet. Da diese Überlegung auch für die  $y$ -Koordinate gilt, muss  $P$  ein Eckpunkt eines Rechtecks sein.

Da nur abzählbar viele Rechtecke beteiligt sind, stehen insgesamt nur abzählbar viele Eckpunkte zur Verfügung. Andererseits gibt es aber überabzählbar viele Punkte auf der Sphäre  $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , wie aus der Bijektion

$$[0, 2\pi[ \longrightarrow S^1, \alpha \longmapsto (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

folgt. Also kann eine abzählbare Überdeckung mit abgeschlossenen Rechtecken in  $B(0, 1)$  nicht den gesamten Rand und damit nicht die abgeschlossene Kreisscheibe überdecken.

**Aufgabe 1.10.** (5 Punkte)

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die  $t$ -Achse rotieren lässt.

## Lösung

Das Volumen des Rotationskörpers  $K$  ist gemäß der Formel gleich

$$\begin{aligned}
 \lambda^3(K) &= \pi \int_0^1 (t + \sqrt{t} + 1)^2 dt \\
 &= \pi \int_0^1 (t^2 + t + 1 + 2t^{3/2} + 2t + 2t^{1/2}) dt \\
 &= \pi \int_0^1 (t^2 + 2t^{3/2} + 3t + 2t^{1/2} + 1) dt \\
 &= \pi \left( \frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^{5/2} + \frac{3}{2}t^2 + \frac{4}{3}t^{3/2} + t \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 1 \right) \\
 &= \pi \frac{10 + 24 + 45 + 40 + 30}{30} \\
 &= \pi \frac{149}{30}.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.11.** (10 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit  $a \leq b$  aus  $\mathbb{R}$ ). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha, f(x) \sin \alpha) \mid x \in [a, b], \alpha \in [0, 2\pi[ \} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

das Volumen 0 besitzt.

## Lösung

Nehmen wir an, dass  $\lambda^3(M) > 0$  ist. Wir betrachten für  $c \geq 1$  die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung  $L_c$  des  $\mathbb{R}^3$  in sich. Wir setzen

$$M_c = L_c(M).$$

Für  $c \neq c'$  sind  $M_c$  und  $M_{c'}$  disjunkt, da aus

$$\begin{pmatrix} x \\ cf(x) \cos \alpha \\ cf(x) \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ c'f(x') \cos \alpha' \\ c'f(x') \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

sofort  $x = x'$  und somit aus der Gleichheit der zweiten und dritten Zeile die „Radius“-Beziehung  $c^2 f(x) = (c')^2 f(x)$ , also  $c = c'$  folgt. Nach der Volumenformel für lineare Abbildungen ist

$$\lambda^3(M_c) = c^2 \lambda^3(M) \geq \lambda^3(M).$$

Daher ist einerseits

$$\lambda^3\left(\bigcup_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} M_c\right) = \sum_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} \lambda^3(M_c) \geq \sum_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} \lambda^3(M) = \infty.$$

Andererseits ist aber diese Menge in

$$[a, b] \times [-R, R] \times [-R, R]$$

mit  $R = 2 \cdot \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$  enthalten (wegen der Stetigkeit existiert das Supremum auf dem kompakten Intervall), die endliches Maß besitzt, so dass wir einen Widerspruch erhalten.

### Aufgabe 1.12. (5 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein endlicher Maßraum und  $A_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen  $e_{A_t}$ . Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 72.1 (siehe Anhang) sind erfüllt, welche nicht?

Lösung

Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$\varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x) = \int_M e_{A_t}(x) d\mu(x) = \int_{A_t} 1 d\mu(x) = \mu(A_t).$$

Wenn z.B.  $M$  ein Maßraum ist mit  $\mu(M) = 1$  und die Familie durch

$$A_t = \begin{cases} \emptyset & \text{für } t \leq 0, \\ M & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

gegeben ist, so besitzt die Funktion  $\varphi(t) = \mu(A_t)$  eine Sprungstelle in 0 und ist daher nicht stetig.

Die Bedingung (1) ist erfüllt. Für festes  $t \in \mathbb{R}$  geht es um die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e_{A_t}(x).$$

Da  $A_t$  nach Voraussetzung messbar ist, ist diese Abbildung messbar.

Die Bedingung (3) ist erfüllt, und zwar mit der konstanten Funktion  $h = 1$ . Es ist  $\int_M h d\mu = \mu(M) < \infty$  aufgrund der vorausgesetzten Endlichkeit des Maßraumes  $M$ , und es ist  $e_A \leq h$  für jede Indikatorfunktion.

Da die Schlussfolgerung des Satzes nicht gilt, kann die Bedingung (2) nicht generell erfüllt sein.

## TESTKLAUSUR 2

Fachbereich Mathematik/Informatik  
Prof. Dr. H. Brenner

5. Februar 2011

## Mathematik III

### Testklausur 2

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(n-teil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\Sigma$
mögl. Pkt.:	4	4	2	6	6	4	6	5	5	6	8	4	4	64
erhalt. Pkt.:														

Note:

**Aufgabe 2.1.** (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Der *Tangentenraum* in einem Punkt  $P \in M$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .
- (2) Eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit*  $M \subseteq N$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $N$ .
- (3) Ein *orientierter Atlas* einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .
- (4) Die *zurückgezogene Differentialform*  $\varphi^*\omega$  zu einer Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\varphi : L \rightarrow M$  zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $L$  und  $M$ .
- (5) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ .
- (6) Eine *positive Volumenform* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$ .
- (7) Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.
- (8) Die *äußere Ableitung* zu einer stetig differenzierbaren Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .

**Aufgabe 2.2.** (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

- (1) Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des Vektorraumes  $V$ . Wie sieht eine Basis des  $k$ -ten Dachproduktes  $\bigwedge^k V$  aus?
- (2) Die *universelle Eigenschaft* des  $k$ -ten Dachproduktes eines Vektorraums  $V$ .
- (3) Die *Formel für die zurückgenommene Volumenform*  $\varphi^*\omega$  zu  $\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$  unter einer stetig differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

- (4) Die *Berechnung des kanonischen Volumens* einer messbaren Menge  $T \subseteq M$  einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ , die ganz in einem offenen Kartengebiet  $T \subseteq U$  liegt.

**Aufgabe 2.3.** (2 Punkte)

Es sei  $K$  die Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $0 = (0, 0, 0)$  im  $\mathbb{R}^3$ . Wie lautet die Formel (ohne Begründung) für

- a) das Volumen der Vollkugel.
- b) den Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

**Aufgabe 2.4.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 2.5.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Tangentialabbildung  $T(\varphi)$  zu

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

surjektiv ist.

**Aufgabe 2.6.** (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

**Aufgabe 2.7.** (6 Punkte)

Berechne die zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\tau$  zu

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - w dx \wedge dy \wedge dw + \cos(xy) dx \wedge dz \wedge dw - y w dy \wedge dz \wedge dw$$

unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (r, s, t) \longmapsto (r^2 s, t, \sin r, e^{st}) = (x, y, z, w).$$

**Aufgabe 2.8.** (5 Punkte)

Berechne das Wegintegral  $\int_\gamma \omega$  zu

$$\gamma : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (-t^2, t^3 - 1, t + 2),$$

für die 1-Differentialform

$$\omega = x^3 dx - y z dy + x z^2 dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 2.9.** (5 Punkte)

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Graphen

$$\Gamma = \{(x, e^x) \mid x \leq 0\}$$

um die  $x$ -Achse rotieren lässt, kleiner als 10 ist.

**Aufgabe 2.10.** (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten den Graph  $M$  der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , also

$$M = \{(u, v, u^2 + uv - v^3) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

mit der vom  $\mathbb{R}^3$  induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M, (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

- Bestimme das totale Differential zu  $\psi$  sowie die Bildvektoren  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$ .
- Bestimme für jeden Punkt der Form  $P = (u, 0)$  den Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms.
- Bestimme für jeden Punkt der Form  $P = (0, v)$  den Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms.

**Aufgabe 2.11.** (8 Punkte)

Sei  $M$  eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer stetigen positiven Volumenform  $\omega$ . Zeige, dass

$$\int_M \omega < \infty$$

ist.

**Aufgabe 2.12.** (4 Punkte)

Es seien  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei  $\psi^*$  das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

**Aufgabe 2.13.** (4 Punkte)

Berechne die äußere Ableitung  $d\omega$  der Differentialform

$$\omega = \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

auf  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ .

TESTKLAUSUR 2 MIT LÖSUNGEN

**Aufgabe 2.1.** (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Der *Tangentenraum* in einem Punkt  $P \in M$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .
- (2) Eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit*  $M \subseteq N$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $N$ .
- (3) Ein *orientierter* Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .
- (4) Die *zurückgezogene Differentialform*  $\varphi^*\omega$  zu einer Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\varphi : L \rightarrow M$  zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $L$  und  $M$ .
- (5) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ .
- (6) Eine *positive Volumenform* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$ .
- (7) Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.
- (8) Die *äußere Ableitung* zu einer stetig differenzierbaren Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .

Lösung

- (1) Der Tangentialraum  $T_P M$  besteht aus allen Äquivalenzklassen von tangential äquivalenten differenzierbaren Wegen durch diesen Punkt.
- (2) Eine abgeschlossene Teilmenge  $M \subseteq N$  heißt abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt  $P \in M$  eine Karte gibt mit  $P \in W \subseteq N$  offen,  $\theta : W \rightarrow W'$ ,  $W' \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und mit

$$M \cap W = \theta^{-1}((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W').$$

- (3) Ein Atlas  $(U_i, V_i, \alpha_i)$  heißt orientiert, wenn sämtliche Karten orientiert sind und wenn alle Kartenwechsel orientierungstreu sind.
- (4) Die zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\omega$  ist für  $P \in L$  und  $v_1, \dots, v_k \in T_P L$  durch

$$(\varphi^*\omega)(P, v_1, \dots, v_k) = \omega(\varphi(P), T_P\varphi(v_1), \dots, T_P\varphi(v_k))$$

definiert.

- (5) Das Wegintegral ist durch

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^* \omega$$

definiert.

- (6) Eine  $n$ -Differentialform  $\omega$  auf  $M$  heißt eine positive Volumenform, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und Koordinatenfunktionen  $x_1, \dots, x_n$ ) in der lokalen Darstellung der Differentialform

$$\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

die Funktion  $f$  überall positiv ist.

- (7) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  heißt riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn auf jedem Tangentialraum  $T_P M$ ,  $P \in M$ , ein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle_P$  erklärt ist derart, dass für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  die Funktionen (für  $1 \leq i, j \leq n$ )

$$g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}, Q \longmapsto g_{ij}(Q) = \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)},$$

$C^1$ -differenzierbar sind.

- (8) Die äußere Ableitung von  $\omega$  wird lokal auf einer Karte, auf der  $\omega$  die Gestalt  $\omega = \sum_{\#(I)=k, I \subseteq \{1, \dots, \dim M\}} f_I dx_I$  besitzt, durch

$$d\omega = \sum_{\#(I)=k, I \subseteq \{1, \dots, \dim M\}} d(f_I) \wedge dx_I$$

definiert.

### Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

- (1) Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des Vektorraumes  $V$ . Wie sieht eine Basis des  $k$ -ten Dachproduktes  $\bigwedge^k V$  aus?
- (2) Die *universelle Eigenschaft* des  $k$ -ten Dachproduktes eines Vektorraums  $V$ .

- (3) Die Formel für die zurückgenommene Volumenform  $\varphi^*\omega$  zu  $\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$  unter einer stetig differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

- (4) Die Berechnung des kanonischen Volumens einer messbaren Menge  $T \subseteq M$  einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ , die ganz in einem offenen Kartengebiet  $T \subseteq U$  liegt.

Lösung

- (1) Die Dachprodukte

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$$

zu  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  bilden eine Basis von  $\bigwedge^k V$ .

- (2) Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $k \in \mathbb{N}$ . Es sei

$$\psi : V^k \longrightarrow W$$

eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren  $K$ -Vektorraum  $W$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\tilde{\psi} : \bigwedge^k V \longrightarrow W$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^k & \longrightarrow & \bigwedge^k V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

kommutiert.

- (3) Die zurückgezogene Volumenform besitzt die Darstellung

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) \cdot \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- (4) Es sei  $T \subseteq U$  messbar und  $\alpha : U \rightarrow V$  eine Karte mit der metrischen Fundamentalmatrix  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  und ihrer Determinante  $g$ . Dann ist

$$\int_T \omega = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} d\lambda^n.$$

**Aufgabe 2.3.** (2 Punkte)

Es sei  $K$  die Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $0 = (0, 0, 0)$  im  $\mathbb{R}^3$ . Wie lautet die Formel (ohne Begründung) für

- das Volumen der Vollkugel.
- den Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

Lösung

- Das Volumen der Vollkugel ist  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .
- Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche ist  $4\pi r^2$ .

**Aufgabe 2.4.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Lösung

Wir betrachten die differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^4 + z^6 - 1.$$

Die Menge  $M$  ist die Faser von  $\varphi$  über 0. Es ist

$$(D\varphi)_{(x,y,z)} = (2x, 4y^3, 6z^5).$$

Diese Ableitung ist nur bei  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  gleich  $(0, 0, 0)$ , und dies ist kein Punkt von  $M$ , so dass  $\varphi$  in jedem Punkt von  $M$  regulär ist. Daher liegt nach dem Satz über implizite Abbildungen eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vor.

Als Faser einer stetigen Abbildung ist  $M$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ . Ferner ist  $M$  beschränkt. Für  $(x, y, z) \in M$  ist nämlich  $|x|, |y|, |z| \leq 1$ , da andernfalls  $x^2 + y^4 + z^6 > 1$  wäre. Dies impliziert die Kompaktheit.

**Aufgabe 2.5.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Tangentialabbildung  $T(\varphi)$  zu

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

surjektiv ist.

Lösung

Die Abbildung  $\varphi$  ist surjektiv, es ist also lediglich zu zeigen, dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die lineare Tangentialabbildung

$$T_t \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \longrightarrow T_{\varphi(t)} S^1$$

surjektiv ist. Da beide Räume eindimensional sind, muss gezeigt werden, dass ein von 0 verschiedener Vektor nicht auf 0 geht. Ein Tangentialvektor an  $t$  wird realisiert durch den differenzierbaren Weg

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto t + s.$$

Der verknüpfte Weg

$$\varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, s \longmapsto (\cos(t + s), \sin(t + s)),$$

realisiert den Bild-Tangentialvektor, und zwar ist (in der umgebenden Ebene  $T_{\varphi(t)} S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ )

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (-\sin t, \cos t),$$

und das ist nicht der Nullvektor.

**Aufgabe 2.6.** (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Lösung

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

besitzen bzgl. der Standardbasis die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

deren Determinante ist

$$-20 + 9 + 4 \cdot 6 = 13.$$

Daher repräsentiert diese Basis die Standardorientierung.

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

besitzen bzgl. der Standardbasis die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -6 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix},$$

deren Determinante ist

$$-3 \cdot 55 - 7(-44 - 6) + 2 \cdot 30 = -165 + 350 + 60 > 0.$$

Daher repräsentiert diese Basis ebenfalls die Standardorientierung, und damit repräsentieren beide Basen die gleiche Orientierung.

### Aufgabe 2.7. (6 Punkte)

Berechne die zurückgezogene Differentialform  $\varphi^*\tau$  zu

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - w dx \wedge dy \wedge dw + \cos(xy) dx \wedge dz \wedge dw - y w dy \wedge dz \wedge dw$$

unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (r, s, t) \longmapsto (r^2 s, t, \sin r, e^{st}) = (x, y, z, w).$$

Lösung

Es ist

$$dx = d(r^2 s) = 2rs dr + r^2 ds,$$

$$dy = dt,$$

$$dz = d(\sin r) = \cos r dr$$

und

$$dw = d(e^{st}) = se^{st} dt + te^{st} ds.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi^*\tau &= d(r^2 s) \wedge dt \wedge d(\sin r) - e^{st} d(r^2 s) \wedge dt \wedge d(e^{st}) \\ &\quad + \cos(r^2 st) d(r^2 s) \wedge d(\sin r) \wedge d(e^{st}) - te^{st} dt \wedge d(\sin r) \wedge d(e^{st}) \\ &= r^2 \cos r ds \wedge dt \wedge dr - 2rste^{st} e^{st} dr \wedge dt \wedge ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(r^2 st) r^2 s e^{st} \cos r ds \wedge dr \wedge dt - t^2 e^{st} e^{st} \cos r dt \wedge dr \wedge ds \\
= & (r^2 \cos r + 2rste^{2st} - r^2 se^{st} \cos(r^2 st) \cos r - t^2 e^{2st} \cos r) dr \wedge ds \wedge dt
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.8.** (5 Punkte)

Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} \omega$  zu

$$\gamma : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (-t^2, t^3 - 1, t + 2),$$

für die 1-Differentialform

$$\omega = x^3 dx - yz dy + xz^2 dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\gamma^* \omega &= (-t^2)^3 d(-t^2) - (t^3 - 1)(t + 2) d(t^3 - 1) - t^2 (t + 2)^2 d(t + 2) \\
&= 2t^7 dt - 3t^2(t^4 + 2t^3 - t - 2) dt - t^2(t^2 + 4t + 4) dt \\
&= (2t^7 - 3t^6 - 6t^5 + 3t^3 + 6t^2 - t^4 - 4t^3 - 4t^2) dt \\
&= (2t^7 - 3t^6 - 6t^5 - t^4 - t^3 + 2t^2) dt.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \omega &= \int_{-1}^0 (2t^7 - 3t^6 - 6t^5 - t^4 - t^3 + 2t^2) dt \\
&= \left( \frac{1}{4} t^8 - \frac{3}{7} t^7 - t^6 - \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{2}{3} t^3 \right) \Big|_{-1}^0 \\
&= -\left( \frac{1}{4} + \frac{3}{7} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) \\
&= -\frac{3}{7} + 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{-45 + 105 - 21 + 70}{105} \\
&= \frac{109}{105}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.9.** (5 Punkte)

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Graphen

$$\Gamma = \{(x, e^x) \mid x \leq 0\}$$

um die  $x$ -Achse rotieren lässt, kleiner als 10 ist.

## Lösung

Wir betrachten die Oberfläche für  $s \leq x \leq 0$  mit einer beliebigen negativen Zahl  $s$ . Der Flächeninhalt ist nach der Rotationsformel gleich

$$2\pi \int_s^0 \sqrt{1 + e^{2t}} e^t dt.$$

Da  $t$  sich im negativen Bereich bewegt, ist  $e^{2t} \leq 1$  und somit ist der Integrand  $\leq \sqrt{2}e^t$ . Damit ist dieses Integral kleiner/gleich

$$2\pi\sqrt{2} \int_s^0 e^t dt = 2\pi\sqrt{2}(1 - e^s) \leq 2\pi\sqrt{2} \leq 2 \cdot 3,2 \cdot 1,5 = 2 \cdot 4,8 < 10.$$

Diese Abschätzung gilt auch für  $s \mapsto -\infty$ .

**Aufgabe 2.10.** (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten den Graph  $M$  der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , also

$$M = \{(u, v, u^2 + uv - v^3) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

mit der vom  $\mathbb{R}^3$  induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M, (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

- Bestimme das totale Differential zu  $\psi$  sowie die Bildvektoren  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$ .
- Bestimme für jeden Punkt der Form  $P = (u, 0)$  den Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms.
- Bestimme für jeden Punkt der Form  $P = (0, v)$  den Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms.

## Lösung

a) Das totale Differential zu  $\psi$  im Punkt  $P = (u, v)$  ist

$$(D\psi)_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u + v & u - 3v^2 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$T_P(\psi)(e_1) = (D\psi)_P(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix}$$

und

$$T_P(\psi)(e_2) = (D\psi)_P(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix}.$$

b) und c) Zur Bestimmung des Flächeninhalts berechnen wir zunächst die

Skalarprodukte der beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix}$ . Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + (2u + v)^2 = 1 + 4u^2 + 4uv + v^2,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix} \right\rangle = (2u + v)(u - 3v^2) = 2u^2 - 6uv^2 + uv - 3v^3$$

und

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + (u - 3v^2)^2 = 1 + u^2 - 6uv^2 + 9v^4.$$

b) Für  $P = (u, 0)$  berechnet sich der Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms zu

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 2u^2 \\ 2u^2 & 1 + u^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1 + 4u^2)(1 + u^2) - 4u^4} = \sqrt{1 + 5u^2}.$$

c) Für  $P = (0, v)$  berechnet sich der Flächeninhalt des von  $T_P(\psi)(e_1)$  und  $T_P(\psi)(e_2)$  in  $T_{\psi(P)}M$  aufgespannten Parallelogramms zu

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+v^2 & -3v^3 \\ -3v^3 & 1+9v^4 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1+v^2)(1+9v^4) - 9v^6} = \sqrt{1+v^2+9v^4}.$$

**Aufgabe 2.11.** (8 Punkte)

Sei  $M$  eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer stetigen positiven Volumenform  $\omega$ . Zeige, dass

$$\int_M \omega < \infty$$

ist.

Lösung

Zu jedem Punkt  $P \in M$  gibt es eine offene Kartenumgebung  $P \in U$  und eine Kartenabbildung

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und so, dass  $\alpha^{-1*}\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ist mit  $f$  stetig und positiv. Wir finden auch eine offene Umgebung  $P \in U' \subseteq U$ , die homöomorph zu einem offenen Ball  $U' \cong B' \subseteq V$  ist, wobei man auch annehmen kann, dass der Abschluss des Balles ganz in  $V$  liegt. Der abgeschlossene Ball ist abgeschlossen und beschränkt, daher ist die stetige Funktion  $f$  darauf und somit auch auf  $U'$  beschränkt. Es folgt, dass  $\int_{U'} \omega$  endlich ist, wobei  $U'$  eine offene Umgebung von  $P$  ist.

Diese offenen Mengen  $U' = U'(P)$  überdecken  $M$ . Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche Überdeckung

$$M = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

mit  $\int_{U_i} \omega < \infty$ . Wegen der Positivität gilt somit

$$\int_M \omega \leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{U_i} \omega \right) < \infty.$$

**Aufgabe 2.12.** (4 Punkte)

Es seien  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei  $\psi^*$  das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

## Lösung

Seien  $P \in W$  und  $v \in \mathbb{R}^m$ . Es ist einerseits

$$d(\psi^* f)(P, v) = D_P(f \circ \psi)(v) = ((D_{\psi(P)} f) \circ (D_P \psi))(v) = (D_{\psi(P)} f)(D_P \psi(v)).$$

Andererseits ist auch

$$(\psi^*(df))(P, v) = (df)(\psi(P), (D_P \psi)(v)) = (D_{\psi(P)} f)(D_P \psi(v)).$$

**Aufgabe 2.13.** (4 Punkte)

Berechne die äußere Ableitung  $d\omega$  der Differentialform

$$\omega = \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

auf  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ .

## Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} d\omega &= d\frac{x^2}{y} \wedge dx - d\frac{x}{y^2} \wedge dy \\ &= -\frac{x^2}{y^2} dy \wedge dx - \frac{1}{y^2} dx \wedge dy \\ &= \frac{x^2 - 1}{y^2} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

## BILDLICENSEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- CC-BY-SA-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0
- PD: gemeinfrei (public domain)

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Diagonal argument.svg, Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	8
Quelle = 1925 kurt gödel.png, Autor = Benutzer Kl833x9 auf Commons, Lizenz = PD	9
Quelle = Assorted polygons.svg, Autor = Benutzer CountingPine auf Commons, Lizenz = PD	10
Quelle = Hausdorff space.svg, Autor = Toby Bartels (= Benutzer Fibonacci auf Commons), Lizenz = copyleft	15
Quelle = Ortoedro.png, Autor = Benutzer Tomruen auf Commons, Lizenz = PD	16
Quelle = Measure illustration.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	18
Quelle = SquareLattice.svg, Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD	20
Quelle = Georges Seurat - Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte.jpg, Autor = Georges Seurat (= Benutzer Oxag auf Commons), Lizenz = PD	20
Quelle = Cylinder (PSF).png, Autor = Benutzer Pearson Scott Foresman auf Commons, Lizenz = PD	24
Quelle = Caratheodory constantin.jpg, Autor = Benutzer Gernheim auf Commons, Lizenz = PD	25
Quelle = Simple set1.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	31
Quelle = Simple set2.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	31
Quelle = LebesgueH.gif, Autor = Benutzer Skraemer auf Commons, Lizenz = PD	35
Quelle = TraslazioneOK.png, Autor = Benutzer Toobaz auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	37
Quelle = Paralleloipedum.png, Autor = Benutzer Svdmolen auf nl. Wikipedia, Lizenz = PD	38
Quelle = Ellipsoide.png, Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD	42

Quelle = Volume under surface.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	50
Quelle = Chebyshev.jpg, Autor = Benutzer Maksim auf Commons, Lizenz = PD	53
Quelle = Lebesgue and Riemann integration animation.gif, Autor = Benutzer WarX auf pl. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5	56
Quelle = Bonaventura Cavalieri.jpeg, Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = PD	63
Quelle = Cavalieri's principle.jpg, Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	65
Quelle = Integral apl rot objem3.svg, Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = PD	66
Quelle = Coneirr3.svg, Autor = Benutzer Mpfiz auf Commons, Lizenz = PD	68
Quelle = Hesounu* rybník.JPG, Autor = Benutzer Juan de Vojníkov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	80
Quelle = Stereographic projection in 3D.png, Autor = Benutzer Mark.Howison auf en.Wikipedia, Lizenz = PD	82
Quelle = Manifold zahyou3.png, Autor = Benutzer 132?? auf ja. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	85
Quelle = Circle - black simple.svg, Autor = Benutzer Dakdada auf Commons, Lizenz = PD	86
Quelle = Tangentialvektor.svg, Autor = Benutzer TN auf de Wikipedia, Lizenz = PD	92
Quelle = Tangent bundle.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	101
Quelle = Torus vectors oblique.jpg, Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	103
Quelle = Toroidal coord.png, Autor = Benutzer Dave Burke auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	105
Quelle = Kulifeder.JPG, Autor = Benutzer Ghinrael auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	116
Quelle = Ressort de compression.jpg, Autor = Benutzer Jean-Jacques MILAN auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	116

- Quelle = One Big Arm.jpg, Autor = Charles Lam (= Benutzer Brian679 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.0 117
- Quelle = Möbius strip.jpg, Autor = Benutzer Dbenbenn auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 118
- Quelle = Georg Friedrich Bernhard Riemann.jpeg, Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = PD 133
- Quelle = Sphere with three handles.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrow auf Commons, Lizenz = PD 134
- Quelle = Cilinderprojectie-constructie.jpg, Autor = Benutzer KoenB auf Commons, Lizenz = PD 142
- Quelle = Runge theorem.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 151
- Quelle = Inner point.png, Autor = Benutzer Zasdfigbnm auf Commons, Lizenz = PD 157
- Quelle = Partition of unity illustration.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 159
- Quelle = SS-stokes.jpg, Autor = Benutzer Kelson auf Commons, Lizenz = PD 162
- Quelle = Théorème-de-Brouwer-(cond-2).jpg, Autor = Benutzer Jean-Luc W auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 167
- Quelle = Théorème-de-Brouwer-(cond-1).jpg, Autor = Benutzer Jean-Luc W auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 167
- Quelle = Cantor set in seven iterations.svg, Autor = Benutzer Hellisp auf Commons, Lizenz = PD 182
- Quelle = Linalg parallelogram area.png, Autor = Nicholas Longo (= Benutzer Thenub314 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.5 182
- Quelle = Annulus.svg, Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz = PD 197
- Quelle = Dicembre.jpg, Autor = Benutzer Lumentzaspì auf Commons, Lizenz = PD 202
- Quelle = DBP 1962 385 Wohlfahrt Schneewittchen.jpg, Autor = Börnsen (= Benutzer NobbiP auf Commons), Lizenz = gemeinfrei 212
- Quelle = Circle on sphere wireframe 10deg 6r.svg, Autor = Benutzer Itai auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 227

272

Quelle = Not-star-shaped.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 229

Quelle = Auguste Rodin - Grubleren 2005-03.jpg, Autor = Auguste Rodin (= Benutzer Hansjorn auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0 234