Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 90

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 90.1. Diskutiere den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung als einen Spezialfall des Satzes von Stokes.

Aufgabe 90.2. Es sei M eine kompakte n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform auf M. Zeige

$$\int_M d\omega = 0.$$

Was bedeutet diese Aussage für S^1? Wie kann man diese Aussage in diesem Fall über ein Wegintegral beweisen?

Aufgabe 90.3. Es sei M eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei τ eine positive Volumenform auf M. Zeige, dass τ nicht exakt ist.

Wie sieht dies ohne die Kompaktheitsvoraussetzung aus?

Aufgabe 90.4. Es sei D das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und $\tau = x^2 y dx \wedge dy$ eine 2-Differentialform auf D. Finde eine Stammform für τ und berechne damit $\int_D \tau$ durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

Aufgabe 90.5. Man mache sich klar, dass der Satz von Green nicht behauptet, dass der Flächeninhalt eines umrandeten Gebiets im $\mathbb{R}^2$ nur von der Länge des Randes abhängt.

Aufgabe 90.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem nichtleeren Rand. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$M \longrightarrow \partial M$$

gibt.

Aufgabe 90.7. Es sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ein Halbraum. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : H \longrightarrow \partial H$$

gibt, deren Einschränkung auf ∂H die Identität ist.

Wie sieht das bei $n = 0$ aus?

Aufgabe 90.8. Zeige, dass es auf einem Annulus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 90.9. (4 Punkte)

Es sei D das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und $\tau = (3x^2y^5 - x \sin y) dx \wedge dy$ eine 2-Differentialform auf D. Finde eine Stammform für τ und berechne damit $\int_D \tau$ durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

Aufgabe 90.10. (6 Punkte)

Wir betrachten den Würfel

$$Q = [-1,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = dx \wedge dy + y dx \wedge dz + x^2y^2z^2 dy \wedge dz \,.$$

Berechne $d\omega$ und die beiden Integrale $\int_{\partial Q} \omega$ und $\int_Q d\omega$ (getrennt voneinander).

Aufgabe 90.11. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe über ein geeignetes Wegintegral.

Aufgabe 90.12. (2 Punkte)

Zeige, dass es auf einem Torus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

Aufgabe 90.13. (3 Punkte)

Es sei B die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und K der obere Kreishalbbogen. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi : B \longrightarrow K$$

gibt, deren Einschränkung auf K die Identität ist.

Aufgabe 90.14. (3 Punkte)

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $|| \, v \, || \leq 1$ und $|| \, w \, || = 1$. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ mit $|| \, v + aw \, || = 1$.