Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 85

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 85.1. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was ist die kanonische Volumenform auf V?

Aufgabe 85.2. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was besagt die in Lemma 85.3 beschriebene Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Differentialformen in dieser Situation?

Aufgabe 85.3. Es sei M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die kanonische Volumenform ω dadurch festgelegt ist, dass sie in jedem Punkt für eine die Orientierung repräsentierende Orthonormalbasis den Wert 1 besitzt.

Aufgabe 85.4. Zeige, dass bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit die Kartenabbildungen

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Isometrie

$$T_P U \longrightarrow T_{\alpha(P)} V$$

induzieren.

Aufgaben zum Abgeben

Bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit M definiert man zu einem Tangentialvektor $v \in T_P M$ die Norm durch $|| v ||= \sqrt{\langle v, v \rangle_P}$.

Aufgabe 85.5. (4 Punkte)

Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Zuordnung

$$TM \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto || v ||,$$

stetig ist.

Aufgabe 85.6. (6 Punkte)

Wir betrachten die Einheitskugel $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ mit x, y, z bezeichnet seien. Für welche Punkte $P \in S^2$ bilden die Einschränkungen von dx und dy auf S^2 eine Basis des Tangentialraums $T_P S^2$.

Aufgabe 85.7. (3 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mit der durch die Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^4,$$

gegebenen Bilinearform eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 85.8. (4 Punkte)

Man gebe für jeden Punkt $P = (x, y, z)$ der Einheitssphäre K eine Orthonormalbasis in $T_P K \subset \mathbb{R}^3$ an (bzgl. der induzierten riemannschen Struktur).

Aufgabe 85.9. (6 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Ellipsoid

$$E = \{(x, y, z) |\, x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 5\}$$

und die Ebene

$$M = \{(x, y, z) |\, 7x - 3y - 2z = 2\}$$

gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Durchschnitts $M \cap E$.

Aufgabe 85.10. (6 Punkte)

Man erstelle eine Computergraphik, die die in Bemerkung 85.4 beschriebene Situation anhand einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.