Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 84

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 84.1. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei I abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

a) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ ist genau dann eine Borelmenge, wenn $T \cap U_i$ eine Borelmenge ist für jedes $i \in I$.

b) Ein σ-endliches Maß μ ist durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ eindeutig bestimmt.

c) Es sei für jedes $i \in I$ ein σ-endliches Maß μ_i auf U_i gegeben. Für jedes Paar $i, j \in I$ sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} \;=\; \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß auf X mit $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Aufgabe 84.2. Zeige, dass das zu einer positiven Volumenform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in das Definition 84.3 eingeführte Volumenmaß ein σ-endliches Maß ist.

Aufgabe 84.3. Es sei

$$\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

die Standard-Volumenform auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass für jede messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\int_T \omega \;=\; \int_T d\lambda^n \;=\; \lambda^n(T)$$

gilt.

Aufgabe 84.4. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer positiven Volumenform ω. Es sei $T \subseteq M$ messbar und $N \subseteq M$ eine Nullmenge. Zeige, dass

$$\int_T \omega \;=\; \int_{T \setminus N} \omega$$

gilt.

Aufgabe 84.5. Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien ω_1 und ω_2 positive Volumenformen auf M. Zeige, dass für jede messbare Teilmenge $T \subseteq M$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) \, = \, a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2$$

gilt.

Aufgabe 84.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Zeige, wie man unter Bezug auf Karten „Nullmengen" von M erklären kann, ohne dass ein Maß gegeben ist. Zeige ferner, dass wenn eine positive Volumenform gegeben ist, diese Nullmengen auch Nullmengen im Sinne der Maßtheorie sind.

Aufgabe 84.7. Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ mit der zurückgezogenen Differentialform $\varphi^*\omega \in \mathcal{E}^1(L)$ und es sei

$$\gamma : I \longrightarrow L$$

eine stetig differenzierbare Kurve (I ein reelles Intervall). Zeige, dass für die Wegintegrale die Gleichheit

$$\int_\gamma \varphi^*\omega \, = \, \int_{\varphi \circ \gamma} \omega.$$

Aufgabe 84.8. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto f(t),$$

eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $\omega = g(s)ds$ eine 1-Differentialform auf $\mathbb{R}$. Bestimme $f^*\omega$.

Aufgabe 84.9. Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \longmapsto (\cos t \, , \, \sin t \,),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Differentialformen

a) $xdx + ydy$,

b) $xdx - ydy$,

c) $ydx + xdy$,

d) $ydx - xdy$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 84.10. (4 Punkte)

Zeige, dass die Antipodenabbildung

$$S^2 \longrightarrow S^2,\ (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,-z),$$

nicht orientierungstreu ist.

Aufgabe 84.11. (4 Punkte)

Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Es sei ω eine positive Volumenform auf M und es sei μ das durch diese Volumenform definierte Maß auf M. Zeige, dass dann jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $\leq n-1$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 84.12. (4 Punkte)

Seien $a,b,c,d,r,s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform

$$\omega = x^a y^b dx + x^c y^d dy\,.$$

Aufgabe 84.13. (5 Punkte)

Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform

$$\omega = (y - z^3)dx + x^2 dy - xzdz\,.$$

Aufgabe 84.14. (3 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der zweiten Gleichungskette im Beweis zu Lemma 84.2.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

(1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile
[[/Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).

(2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort

{{:Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Begründungsfenster}}

ein.

(3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Gleichung ein.

(4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort

[[Ihr Benutzername/Mannigfaltigkeit/Positive Volumenform/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

hinschreiben.