Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 80

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 80.1. Zeige, dass das Produkt $M \times N$ von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N selbst wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 80.2. Es seien $M_1 \subseteq N_1$ und $M_2 \subseteq N_2$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten. Zeige, dass ihr Produkt $M_1 \times M_2$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $N_1 \times N_2$ ist.

AUFGABE 80.3. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\varphi : M \longrightarrow M \times M,\, x \longmapsto (x, x),$$

die Diagonalabbildung in das Produkt $M \times M$. Zeige, dass die Diagonale $\varphi(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 80.4. Betrachte die Kreislinie S^1. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf S^1, also ein neutrales Element $P \in S^1$, eine differenzierbare Abbildung

$$n : S^1 \longrightarrow S^1,\, x \longmapsto n(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$T = S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1,\, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass S^1 mit diesen Daten zu einer kommutativen Gruppe wird.

AUFGABE 80.5. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

und

$$\cdot : K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 80.6. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige die Gleichheit $V = \bigwedge^1 V$.

Aufgabe 80.7. Sei K ein Körper und V ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $n > m$. Zeige $\bigwedge^n V = 0$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 80.8. (4 Punkte)

Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels T_{S_1} der 1-Sphäre S^1 mit dem Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ gibt.

In der folgenden Aufgabe wird der Begriff eines R-Moduls verwendet (das ist eine direkte Verallgemeinerung des Vektorraumsbegriffes).

Sei R ein kommutativer Ring und $M = (M, +, 0)$ eine kommutative Gruppe. Man nennt M einen *R-Modul*, wenn es eine Operation

$$R \times M \longrightarrow M,\ (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v\,,$$

gibt, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in R$ und $u, v \in M$ beliebig):

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u+v) = (ru) + (rv)$,
(3) $(r+s)u = (ru) + (su)$,
(4) $1u = u$.

Aufgabe 80.9. (4 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $R = C^1(M, \mathbb{R})$ der Ring der differenzierbaren Funktionen auf M und sei F die Menge aller Vektorfelder auf M.

a) Definiere eine Addition auf F derart, dass F zu einer kommutativen Gruppe wird.

b) Definiere eine Skalarmultiplikation

$$R \times F \longrightarrow F,\ (f, s) \longmapsto fs,$$

derart, dass F zu einem R-Modul wird.

Aufgabe 80.10. (5 Punkte)

Sei $0 < r < R$ und sei

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \, .$$

Zeige, dass die Abbildung

$S^1 \times S^1 \longrightarrow T$, $(\varphi, \psi) \longmapsto ((R + r \cos \psi) \cos \varphi \, , (R + r \cos \psi) \sin \varphi \, , r \sin \psi)$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 80.11. (6 Punkte)

Sei T ein Torus und seien $P, Q \in T$ zwei Punkte. Zeige, dass es eine gemeinsame Kartenumgebung $P, Q \in U \subseteq T$ gibt derart, dass die Kartenabbildung

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Homöomorphie mit $V =]0,1[\times]0,1[$ ergibt.