Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 78

Gar nicht mehr lange!

Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 78.1. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in M$ und $Q = \varphi(P)$ und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit einem offenen Intervall $0 \in I$ und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$. Es seien γ_1 und γ_2 im Punkt P tangential äquivalent. Zeige, dass auch die Verknüpfungen $\varphi \circ \gamma_1$ und $\varphi \circ \gamma_2$ tangential äquivalent in Q sind.

Aufgabe 78.2. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Wir betrachten die folgende Menge.

$$T = \{(U, f) | \, U \subseteq M \text{ offen}, \, P \in U, \, f \in C^1(U, \mathbb{R})\} .$$

Wir betrachten die Relation

$$(U, f) \sim (V, g) : \text{ es gibt eine offene Menge } W \text{ mit } P \in W \subseteq U \cap V \text{ mit } f|_W = g|_W .$$

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf T ist.

(2) Zeige, dass es eine natürliche Ringstruktur auf der Menge der Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation gibt.

Aufgabe 78.3. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ betrachten wir die Menge $C^1(U, \mathbb{R})$ der differenzierbaren Funktionen auf U. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

(1) Zeige, dass zu $V \subseteq U$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ auch die Einschränkung $f|_V$ zu $C^1(V, \mathbb{R})$ gehört.
(2) Sei $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Zeige, dass $f = 0$ genau dann ist, wenn sämtliche Einschränkungen $f|_{U_i} = 0$ sind.
(3) Es sei eine Familie $f_i \in C^1(U_i, \mathbb{R})$ von Funktionen gegeben, die die „Verträglichkeitsbedingung“ $f_i|_{U_i \cap U_i} = f_j|_{U_i \cap U_i}$ für alle i, j erfüllen. Zeige, dass es ein $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ gibt mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle i.

Aufgabe 78.4. Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{T} = \{V \subseteq Y \,|\, \varphi^{-1}(V) \text{ ist offen in } X\}$$

eine Topologie auf Y definiert, bzgl. der φ stetig ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe eingeführte Topologie nennt man Bildtopologie.

Aufgabe 78.5. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ durch

$$P \sim Q, \text{ falls } P - Q \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die Quotientenmenge $Y = \mathbb{R}^n/\sim = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sei mit der Bildtopologie zur Quotientenabbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to Y$ versehen. Zeige, dass Y ein Hausdorff-Raum ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 78.6. (6 Punkte)

Es seien zwei Punkte P und Q auf der Einheitssphäre gegeben. Zeige, dass es einen Diffeomorphismus der Sphäre in sich gibt, der P in Q überführt.

Aufgabe 78.7. (8 Punkte)

Der Quotientenraum $Y = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sei mit der Bildtopologie versehen. Definiere auf Y eine Mannigfaltigkeitsstruktur durch geeignete Karten. Zeige, dass die Quotientenabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$$

eine differenzierbare Abbildung ist, und dass die Tangentialabbildung in jedem Punkt ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 78.8. (4 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Zeige, dass für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

mit $\gamma(0) = P$ und $a \in \mathbb{R}$ im Tangentialraum T_PM die Beziehung

$$a[\gamma] = [\lambda]$$

gilt, wobei λ durch $\lambda(t) := \gamma(at)$ definiert sei.

Aufgabe 78.9. (6 Punkte)

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Definiere für C^k-Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ eine Äquivalenzrelation, die in einer (jeder) Karte die Ableitungen bis zur Ordnung k berücksichtigt. Wie sehen einfache Vertreter dieser Äquivalenzrelation aus? Definiere eine Vektorraumstruktur auf der Quotientenmenge und bestimme die Dimension.

Aufgabe 78.10. (5 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Wir sagen, dass zwei Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ den gleichen *Kurvenkeim* definieren, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\gamma_1|_{[-\epsilon,\epsilon]} = \gamma_2|_{[-\epsilon,\epsilon]} .$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kurven $\gamma : I \to M$ mit $\gamma(0) = P$ (und mit verschiedenen offenen Intervallen $0 \in I$) definiert.

b) Zeige, dass differenzierbare Kurven, die den gleichen Kurvenkeim repräsentieren, auch den gleichen Tangentialvektor repräsentieren.