

Mathematik III**Arbeitsblatt 74****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 74.1. Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$.

AUFGABE 74.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2.$$

AUFGABE 74.3. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zeige, dass die Menge der Nullmengen von M ein Mengen-Präring ist.

AUFGABE 74.4. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und es sei

$$g : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \int_T g \, d\mu$$

ein Maß auf M ist.

AUFGABE 74.5. Welche Dichte besitzt das Borel-Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n bzgl. dem Borel-Lebesgue-Maß?

AUFGABE 74.6. Man gebe ein Beispiel für ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das keine Dichte bzgl. dem Borel-Lebesgue-Maß besitzt.

AUFGABE 74.7. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + \sin y, y + \cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det (D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 74.8. (6 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π . Berechne die Integrale

a) $\int_G x \, d\lambda^2$,

b) $\int_G y \, d\lambda^2$.

AUFGABE 74.9. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x, y) = x(\sin x)(\cos xy)$ über dem Rechteck $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$.

AUFGABE 74.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2 + 1)(v^2 + v + 1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

AUFGABE 74.11. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ und $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

AUFGABE 74.12. (6 Punkte)

Wir betrachten das Bildmaß $\mu = \varphi_*\lambda^n$ zur Abbildung ($n \geq 1$)

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

a) Zeige, dass μ ein σ -endliches Maß auf \mathbb{R} ist.

b) Zeige, dass μ bzgl. λ^1 die Dichte

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \frac{\beta_n}{n} t^{n-1} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

besitzt, wobei β_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.