Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 72

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 72.1. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

gilt.

AUFGABE 72.2. Sei

$$f(x,y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y \; .$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0, \pi]$ über $x \in [0,1]$ und zum Parameter $x \in [0,1]$ über $y \in [0, \pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

AUFGABE 72.3. Es sei $]a, b[$ ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t) dt$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a,b[} f \, d\lambda$ (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.

Mit der vorstehenden Aufgabe ist jetzt die folgende Klausuraufgabe (zu Mathematik II) einfach zu lösen.

AUFGABE 72.4. Es sei

$$f :]0, 1] \longrightarrow [0, \infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty[\longrightarrow]0, 1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t) \, dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y) \, dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 72.5. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

Aufgabe 72.6. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

Aufgabe 72.7. (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge $f_n(x) = \sin(nx)$ auf $[0,\pi]$.

Aufgabe 72.8. (5 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante $h \geq |f_n|$ nicht gilt.

Aufgabe 72.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die Fakultätsfunktion $\operatorname{Fak}(x)$ beliebig oft differenzierbar ist mit den Ableitungen

$$\operatorname{Fak}^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^x e^{-t}\, dt\,.$$