Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 71

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 71.1. Es sei M ein Messraum mit einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ und sei

$$f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktion mit der Grenzfunktion

$$f : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass $S^o(M_n; f_n)$ eine Ausschöpfung von $S^o(M_n; f_n)$ ist.

Aufgabe 71.2. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Es sei f die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) \;=\; S(f) \setminus \Gamma_f .$$

Aufgabe 71.3. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, sei f eine integrierbare nichtnegative numerische Funktionen auf M und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass auch af integrierbar ist und dass

$$\int_M af \, d\mu \;=\; a \cdot \int_M f \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 71.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto 1 - t^2 .$$

Für welches $x \in [0, 1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 71.5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \limsup\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Aufgabe 71.6. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$y_n := \inf(x_k,\, k \geq n)\,.$$

a) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\liminf\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ konvergiert.

Aufgabe 71.7. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \liminf\left((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

und

$$\limsup\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \limsup\left((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

messbar sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 71.8. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen ist.

Aufgabe 71.9. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto x^2.$$

Berechne für $n = 1, 2, \ldots, 5$ das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

a) Die Funktionen $g \leq f$, die auf den n Teilintervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ (mit $k = 0, \ldots, n-1$) konstant sind.

b) Die Funktionen $h \leq f$, die nur die Werte $\frac{k}{n}$ annehmen.

Aufgabe 71.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche $x, y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

In der folgenden Aufgabe soll die Vermutung von Feldschnieders-Günther bewiesen werden.

Aufgabe 71.11. (8 Punkte)

Es seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ gegeben und es sei

$$S = \{av_1 + bv_2 + cv_3 |\, a, b, c \in [0,1]\}$$

das davon erzeugte „Pseudoparallelogramm“. Zeige, dass der Flächeninhalt von S gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Parallelogramme ist, die von je zwei der beteiligten Vektoren aufgespannt werden.

Nachtragsaufgabe

Die folgende Aufgabe (Aufgabe 66.4) wurde vereinzelt zu großzügig korrigiert. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und keine fünf Punkte bekommen hat, darf sie erneut einreichen (bitte alte Lösung mit anheften, Korrektur übernimmt Jan Uliczka).

Aufgabe 71.12. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.