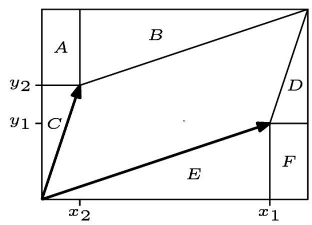
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 68

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 68.1. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



Aufgabe 68.2. Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.

Aufgabe 68.3. Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$(1, 3, 5) \text{ und } (-2, 4, 1)$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 68.4. Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich -1 ist.

(Tipp: Betrachte $L^t \circ L$).

Aufgabe 68.5. Es sei

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung und $c \in \mathbb{R}$. Zeige die Gleichheit $L_*(c\lambda^n) = c(L_*\lambda^n)$.

Aufgabe 68.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine positive reelle Zahl κ_n gibt derart, dass das n-dimensionale Volumen einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Radius r und mit einem beliebigen Mittelpunkt gleich $\kappa_n r^n$ ist.

Aufgabe 68.7. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass φ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 68.8. Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein linearer Endomorphismus, der nicht bijektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_* \lambda^n$ nicht σ-endlich ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 68.9. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$(2, 1, 3, 4), (4, 0, -1, 3) \text{ und } (5, -2, -2, 0)$$

im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 68.10. (5 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 3)$ erzeugten „Pseudoparallelogramms“, also von

$$S = \{a(0, 1) + b(2, 0) + c(1, 3) |\, a, b, c \in [0, 1]\} .$$

Aufgabe 68.11. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung, die surjektiv, aber nicht injektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^n$ für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ durch

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \lambda^m(T) = 0 , \\ \infty, \text{ falls } \lambda^m(T) > 0 , \end{cases}$$

bestimmt ist.

Aufgabe 68.12. (5 Punkte)

Sei

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Oberfläche der Einheitskugel. Zeige, dass das Volumen dieser Oberfläche 0 ist.

Aufgabe 68.13. (5 Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$. Zeige, dass die Multiplikationsabbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto uz,$$

flächentreu ist.

(Dabei ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß versehen).

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Linalg parallelogram area.png, Autor = Nicholas Longo (= Benutzer Thenub314 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.5 1