**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2010/2011**

# Mathematik III

## Arbeitsblatt 64

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 64.1. Man mache sich klar, dass die Maßtheorie auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ „nahezu“ äquivalent ist zur Theorie der Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden. Warum nur nahezu? Welches maßtheoretische Konzept korrespondiert dabei zur Konvergenz der Reihe?

Aufgabe 64.2. Bestimme die Belegungsfunktion zu einem Dirac-Maß.

Aufgabe 64.3. Es sei $W = [0,1[^n$ der halboffene Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ und das zugehörige Gittermaß $\mu_{\frac{1}{k}}$ die Beziehung

$$\mu_{\frac{1}{k}}(W) = 1$$

gilt.

Aufgabe 64.4. Wir betrachten die Menge $T = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, und zu jedem $\epsilon > 0$ das zugehörige Gittermaß $\mu_\epsilon$. Zeige, dass

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{\frac{1}{k}}(T)$$

existiert, dass aber

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mu_\epsilon(T)$$

nicht existiert.

Aufgabe 64.5. Man zeige durch ein Beispiel, dass die „Schrumpfungsformel“ aus Lemma 64.4 (6) nicht ohne die Endlichkeitsvoraussetzung gilt.

Aufgabe 64.6. Wo geht in den Beweis zu Satz 64.7 die Endlichkeit der $M_n$ ein?

Aufgabe 64.7. Zeige, dass das Bildmaß eines Maßes unter einer messbaren Abbildung in der Tat ein Maß ist.

Aufgabe 64.8. Es seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ und $(S, \mathcal{C})$ Messräume und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

und

$$\psi : N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei $\mu$ ein Maß auf $M$. Zeige, dass für die Bildmaße die Beziehung

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu \;=\; \psi_* (\varphi_* \mu)$$

gilt.

Aufgabe 64.9. Es seien $M$ und $N$ Messräume und es sei

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei $\delta_x$ das im Punkt $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß. Zeige $\varphi_*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 64.10. (3 Punkte)

Bestimme die Belegungsfunktion zum Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 64.11. (3 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(N, \mathcal{B})$ ein Messraum und $C$ die Menge der messbaren Abbildungen von $M$ nach $N$. Für $f, g \in C$ sei

$$f \sim g, \text{ falls } \mu(\{x \in M |\, f(x) \neq g(x)\}) = 0\,.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 64.12. (6 Punkte)

Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(S) = \pi\,,$$

wobei $\mu_\epsilon$ das Gittermaß zu $\epsilon > 0$ bezeichnet.

(Man denke an das Riemann-Integral.)

Aufgabe 64.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen $\sigma$-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und eine messbare Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

in einen Messraum $N$ derart, dass das Bildmaß $\varphi_* \mu$ nicht $\sigma$-endlich ist.