Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 27

Zu einer endlichen Untergruppe $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ liegt im Quotienten $X = \mathbb{C}^2 \backslash G$ im Bildpunkt P von $0 \in \mathbb{C}^2$ eine Singularität vor, dagegen ist $X \setminus \{P\}$ glatt. Wir stellen uns die folgenden Fragen:

Kann man es dieser glatten offenen Menge ansehen, dass sie nur durch einen singulären Punkt zu einer affinen Varietät abgeschlossen wird (oder könnte man sie auch durch einen glatten Punkt abschließen)?

Kann man die Gruppe G, mit der wir X definiert haben, aus intrinsischen Eigenschaften von X oder von $X \setminus \{P\}$ rekonstruieren?

Sind die zu den unterschiedlichen G auftretenden Quotienten untereinander verschieden?

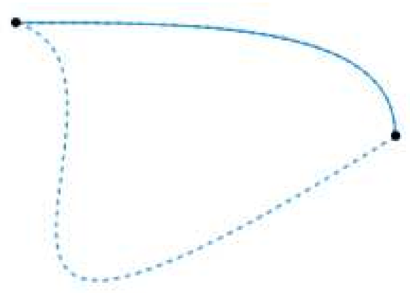
Wir werden all diese Fragen positiv beantworten, wobei wir eine wichtige topologische Konstruktion einsetzen, nämlich die Fundamentalgruppe.

Die Fundamentalgruppe

Es sei X ein topologischer Raum, den wir als wegzusammenhängend voraussetzen wollen, zu je zwei Punkten $x, y \in X$ gibt es also einen stetigen Weg

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.



Zwei Wege

$$\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow X$$

heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung (die eine *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1 genannt wird)

$$\Gamma \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

gibt, für die

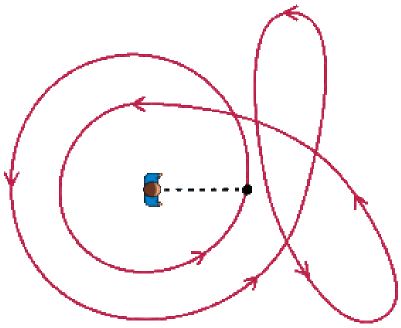
$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s),\ \Gamma(s,1) = \gamma_0(s),\ \Gamma(0,t) = x \text{ und } \Gamma(1,t) = y$$

für alle s, t gilt. Zu jedem festen t ist $\Gamma(-,t)$ ein stetiger Weg von x nach y. Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Wege von x nach y. Ein Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist, wenn also der Startpunkt mit dem Endpunkt übereinstimmt. Dieser Punkt heißt dann auch *Aufpunkt* des Weges. Häufig betrachtet man stetige geschlossene Wege in X als stetige Abbildungen $\gamma \colon S^1 \to X$.

Zwei stetige geschlossene Wege kann man miteinander verknüpfen, indem man zuerst den einen Weg und anschließend den anderen Weg durchläuft. Als Definitionsbereich erhält man dabei das Intervall $[0,2]$. Man kann aber, indem man die beiden Wege doppelt so schnell durchläuft, auch das Einheitsintervall als Definitionsbereich wählen. Wichtig ist, dass zu geschlossenen homotopen Wegen $\gamma_0 \sim \delta_0$ und $\gamma_1 \sim \delta_1$ auch die Verknüpfungen $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ und $\delta = \delta_0\delta_1$ homotop sind. Dies erlaubt eine Verknüpfung auf der Menge der Äquivalenzklassen von homotopen geschlossenen Wegen mit Aufpunkt x, die mit $\pi_1(X,x)$ bezeichnet wird. Diese Menge ist mit dem konstanten Weg (also der Homotopieklasse des konstanten Weges) als neutralem Element eine Gruppe, die die *Fundamentalgruppe* von X heißt. Die Assoziativität ist dabei nicht völlig selbstverständlich, da drei geschlossene Weg je nach Klammerung zu unterschiedlichen Wegen auf dem Einheitsintervall führen. Die enstehenden Wege sind aber homotop, so dass auf den Homotopieklassen die Assoziativität gilt. Die inverse Homotopieklasse ist durch den entgegengesetzt durchlaufenen Weg gegeben. Deren Verknüpfung ist in der Tat homotop zum konstanten Weg, oder, wie man auch sagt, *nullhomotop*.

Definition 27.1. Ein topologischer Raum X heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn jeder stetige geschlossene Weg in X nullhomotop ist.

Der einfache Zusammenhang bedeutet, dass $\pi_1(X,x) = 0$ ist (für einen beliebigen Aufpunkt $x \in X$).



Die Fundamentalgruppe der punktierten reellen Ebene ist $\mathbb{Z}$, man spricht von der *Windungszahl* des Weges.

DEFINITION 27.2. Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar* (oder *zusammenziehbar*) auf einen Punkt $P \in X$, wenn es eine stetige Abbildung

$$H\colon [0,1] \times X \longrightarrow X$$

gibt derart, dass die Eigenschaften

(1) $H(1,-) = \mathrm{Id}_X$,
(2) $H(0,-) = P$,
(3) $H(t,P) = P$ für alle $t \in [0,1]$

gelten.

Beispielsweise ist der $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar und nach dem folgenden Satz auch einfach zusammenhängend.

SATZ 27.3. *Die Fundamentalgruppe eines kontrahierbaren Raumes ist trivial.*

Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

und einem Punkt $x \in X$ mit $y = \varphi(x)$ induziert ein stetiger geschlossener Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit Aufpunkt x einen stetigen geschlossenen Weg $\varphi \circ \gamma$ in Y mit Aufpunkt y. Diese Zuordnung ist mit Homotopien von Wegen verträglich, d.h. wenn $\gamma \sim \delta$ zwei homotope Wege in X mit Aufpunkt x sind, so sind auch $\varphi \circ \gamma$ und $\varphi \circ \delta$ homotop. Daher gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y).$$

Diese Abbildung ist sogar ein Gruppenhomomorphismus.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe ist im Allgemeinen schwierig. Ein wichtiges Hilfsmittel sind Überlagerungen.

DEFINITION 27.4. Es seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung

$$p\colon Y \longrightarrow X$$

heißt *Überlagerung*, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und eine Familie diskreter topologischer Räume F_i, $i \in I$, derart gibt, dass $p^{-1}(U_i)$ homöomorph zu $U_i \times F_i$ (versehen mit der Produkttopologie) ist, wobei die Homöomorphien mit den Abbildungen nach U_i verträglich sind.

Zu einer stetigen Abbildung $\pi \colon Y \to X$ und einem stetigen Weg

$$\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$$

nennt man einen stetigen Weg

$$\tilde{\gamma} \colon [0,1] \longrightarrow Y$$

mit

$$\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$$

eine *Liftung* von γ. Bei einem geschlossenen Weg verlangt man dabei *nicht*, dass die Liftung wieder geschlossen ist. Zu einer Überlagerung und einem vorgegebenen Punkt $y \in Y$ über $\gamma(0)$ gibt es eine eindeutige Liftung $\tilde{\gamma}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = y.$$

Zur Fundamentalgruppe der Quotientensingularitäten

Sei $X = \mathbb{C}^2 \backslash G = \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[U,V]\right)^G\right)_{\mathbb{C}}$. Wir wollen zeigen, dass man die operierende Gruppe G im Quotienten X wiederfinden kann, und zwar als Fundamentalgruppe der punktierten Singularität, also des Quotienten ohne den singulären Punkt.

Zuerst zeigen wir, dass die Fundamentalgruppe (des Spektrums) einer positiv-graduierten Algebra trivial ist.

Lemma 27.5. *Es sei R eine positiv-graduierte endlich-erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist $X = (\operatorname{Spek}(R))_{\mathbb{C}}$ kontrahierbar und die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ist trivial.*

Beweis. Es ist $X \subseteq \mathbb{C}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, die unter der Operation

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

mit

$$t(x_1, \ldots, x_n) = (t^{d_1} x_1, \ldots, t^{d_n} x_n)$$

von $t \in \mathbb{C}^\times$ abgeschlossen ist, wobei die d_i die positiven Grade der Erzeuger der Algebra bezeichnen. Es genügt daher, eine Kontraktion des affinen Raumes $\mathbb{C}^n$ auf den Nullpunkt anzugeben, die mit den Bahnen der Operation verträglich ist. Dazu setzen wir die Operationsabbildung zu einer Abbildung

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

mit der gleichen Vorschrift fort. Wegen $d_i \geq 1$ ist dies wohldefiniert und algebraisch, also insbesondere stetig. Für $t = 0$ ist dies die Nullabbildung und für $t = 1$ die Identität. Für jedes $t \in [0,1]$ wird der Nullpunkt auf sich abgebildet. Die auf die Verbindungsstrecke von 0 nach 1 eingeschränkte Abbildung

$$[0,1] \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

ist somit eine kontrahierende Abbildung auf den Nullpunkt. Nach Satz 27.3 ist die Fundamentalgruppe trivial. $\square$

Zu einer endlich erzeugten zusammenhängenden $\mathbb{C}$-Algebra R, einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ und dem zugehörigen Punkt $P \in X = (\operatorname{Spek}(R))_{\mathbb{C}}$ nennt man die Fundamentalgruppe von $X \setminus \{P\}$ die lokale Fundamentalgruppe von X in P. Bei einer positiv graduierten $\mathbb{C}$-Algebra meint man mit der lokalen Fundamentalgruppe die lokale Fundamentalgruppe im Punkt, der zum irrelevanten Ideal R_+ gehört.

Im Fall der ADE-Singularitäten ist $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ der Fixpunkt der Gruppenoperation und sein Bildpunkt im Quotienten ist der singuläre Punkt $P \in X$. Wenn man die beiden Punkte $(0,0)$ und P herausnimmt, so erhält man eine Gruppenoperation von G auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit dem Quotienten $X \setminus \{P\}$. Wir werden gleich begründen, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow X \setminus \{P\}$$

eine Überlagerung ist und dass die Fundamentalgruppe von $X \setminus \{P\}$ isomorph zu G ist. Dazu zitieren wir ohne Beweis den folgenden Satz.

Satz 27.6. *Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem einfach zusammenhängenden Hausdorff-Raum X fixpunktfrei operiere. Dann ist*

$$X \longrightarrow X \backslash G$$

eine Überlagerung und die Fundamentalgruppe des Bahnenraumes $X \backslash G$ ist gleich G.

Satz 27.7. *Es sei $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe mit der zugehörigen zweidimensionalen speziellen Quotientensingularität $R = \mathbb{C}[U,V]^G$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Operation von G auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist fixpunktfrei.*
(2) *Die lokale Fundamentalgruppe von $(\operatorname{Spek}(R))_{\mathbb{C}} \setminus \{P\}$ ist gleich G, wobei P der singuläre Punkt von $(\operatorname{Spek}(R))_{\mathbb{C}}$ ist.*

Beweis. (1). Die zu $\sigma \in G$ gehörende lineare Abbildung besitze einen Fixpunkt $\neq 0$. Dann ist dies ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Da σ nach Satz 3.19 diagonalisierbar ist, ist in einer geeigneten Basis

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

und wegen $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist $\zeta = 1$, also ist σ die Identität. (2) folgt aus (1) und Satz 27.6, unter Berücksichtigung von Aufgabe 15.11 und Aufgabe 27.10. $\square$

Dies beantwortet die eingangs erwähnten Fragen positiv. Für die erste Frage muss man wissen, dass eine komplex-zweidimensionale affine glatte Varietät, in jedem ihrer Punkte eine triviale lokale Fundamentalgruppe besitzt, da eine offene Umgebung des glatten Punktes diffeomorph zu einem offenen Ball im $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ ist und ein solcher punktierter Ball eine triviale Fundamentalgruppe besitzt.

Abbildungsverzeichnis