Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 12

Wir kommen nun zu wichtigen Folgerungen der in den letzten beiden Vorlesungen entwickelten Begriffe für die Invariantentheorie.

Ganzheit und Invariantenringe

LEMMA 12.1. *Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G durch Ringautomorphismen operiere. Dann ist $R^G \subseteq R$ eine ganze Erweiterung.*

Beweis. Zu $f \in R$ betrachten wir das Produkt

$$P = \prod_{\sigma \in G} (X - f\sigma) \in R[X] \,.$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms gehören zum Invariantenring R^G. Ferner ist P normiert und es ist $P(f) = 0$ (da ja $X - fe_G = X - f$ ein Linearfaktor ist). Somit liefert P eine Ganzheitsgleichung für f über R^G und daher ist $R^G \subseteq R$ ganz. □

SATZ 12.2. *Es sei R ein normaler Integritätsbereich und G eine Gruppe, die auf R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Dann ist auch der Invariantenring normal.*

Beweis. Es sei $q \in Q\left(R^G\right) \subseteq Q(R)$ und q erfülle eine Ganzheitsgleichung über R^G. Wegen $R^G \subseteq R$ ist q auch ganz über R und wegen der Normalität von R muss $q \in R$ gelten. Wegen

$$R \cap Q\left(R^G\right) \, = \, R^G$$

ist somit $q \in R^G$, also ist R^G normal. □

Es ist eine wichtige Frage, welche weiteren Eigenschaften eines Ringes sich - unter welchen Bedingungen - auf einen Invariantenring übertragen. Für die endliche Erzeugtheit werden wir das im Folgenden behandeln, für die Faktorialität weiter unten. Die Eigenschaft, dass der Invariantenring bei einer linearen Operation ein Polynomring (also „regulär“) ist, werden wir später ausführlich behandeln.

Der Satz von Noether

Der folgende Satz heißt *Satz von Noether.*

SATZ 12.3. *Es sei K ein Körper, R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra, auf der eine endliche Gruppe G durch K-Algebraautomorphismen operiere. Dann ist der Invariantenring R^G eine endlich erzeugte K-Algebra.*

Beweis. Sei
$$R = K[f_1, \ldots, f_n].$$
Nach Lemma 12.1 ist $R^G \subseteq R$ eine ganze Erweiterung. Zu jedem f_i gibt es daher eine Ganzheitsgleichung
$$f_i^{n_i} + a_{i,n_i-1} f_i^{n_i-1} + \ldots + a_{i,1} f_i + a_{i,0} = 0$$
mit $a_{i,j} \in R^G$. Wir betrachten die von den Koeffizienten $a_{i,j}$ erzeugte K-Unteralgebra von R^G, also
$$S := K[a_{i,j},\, 1 \leq i \leq n,\, 0 \leq j < n_i] \subseteq R^G.$$
Dabei ist S endlich erzeugt, und sämtliche Ganzheitsgleichungen sind über S formulierbar, d.h. nach Korollar 11.6, dass R auch über S ganz ist. Da S über K endlich erzeugt ist, ist R insbesondere über S endlich erzeugt, so dass $S \subseteq R$ nach Satz 11.10 sogar endlich ist. Da S noethersch ist, muss nach Satz 10.13 auch die S-Unteralgebra $R^G \subseteq R$ ein endlicher S-Modul sein. Damit ist insgesamt R^G eine endlich erzeugte K-Algebra. $\square$

Aus Lemma 12.1 und Satz 12.3 folgt in Zusammenhang mit Satz 11.10, dass $R^G \subseteq R$ eine endliche Abbildung ist.

BEMERKUNG 12.4. Das *14. Hilbertsche Problem* ist die Frage, ob für jede Gruppenoperation auf einer endlich erzeugten K-Algebra auch der Invariantenring R^G endlich erzeugt ist. Es wurde von Hilbert 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris als eines seiner 23 mathematischen Probleme vorgestellt und in den späten Fünfzigern durch ein Gegenbeispiel von Masayoshi Nagata negativ beantwortet.

Der Satz von Hilbert

Wir geben einen weiteren Beweis für den Endlichkeitssatz unter der Voraussetzung, dass der Invariantenring ein direkter Summand ist. Die dabei operierende Gruppe muss nicht endlich sein. Die Voraussetzung, dass es einen Reynolds-Operator gibt, ist für endliche Gruppen erfüllt, wenn ihre Ordnung kein Vielfaches der Charakteristik ist. Sie ist ferner für die sogenannten linear-reduktiven Gruppen in Charakteristik 0 erfüllt, also beispielsweise für die allgemeine lineare Gruppe, was wir später zeigen werden.

Definition 12.5. Es sei K ein Körper. Eine $\mathbb{Z}$-graduierte kommutative K-Algebra R heißt *positiv-graduiert*, wenn $R_d = 0$ für $d < 0$ und $R_0 = K$ ist.

Insbesondere kann man den Polynomring positiv graduieren, wenn man jeder Variablen einen positiven Grad $\operatorname{grad}(X_i) = d_i \in \mathbb{N}_{>0}$ zuweist.

Lemma 12.6. *Es sei G eine Gruppe, die auf dem positiv graduierten Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ als Gruppe von homogenen Ringautomorphismen operiere. Es sei I_G das von allen homogenen Invarianten positiven Grades erzeugte Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ und es sei $g_1, \ldots, g_m$ ein homogenes Idealerzeugendensystem dieses Ideals. Es sei vorausgesetzt, dass der Invariantenring ein homogener direkter Summand des Polynomringes ist. Dann bilden die $g_1, \ldots, g_m$ ein Algebraerzeugendensystem des Invariantenringes, d.h. es ist*

$$K[X_1, \ldots, X_n]^G = K[g_1, \ldots, g_m].$$

Beweis. Aufgrund der Homogenität der Operation ist der Invariantenring selbst positiv graduiert. Wir beweisen die Inklusion

$$K[X_1, \ldots, X_n]^G \subseteq K[g_1, \ldots, g_m]$$

durch Induktion über den Grad. Wir betrachten also ein homogenes Element $f \in K[X_1, \ldots, X_n]^G$ von positivem Grad. Wegen $f \in I_G$ kann man

$$f = \sum_{j=1}^{m} h_j g_j$$

mit homogenen Elementen h_j von einem Grad $< \operatorname{grad}(f)$ schreiben. Der Reynolds-Operator

$$\rho\colon K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]^G,$$

angewendet auf diese Gleichung, liefert

$$f = \rho(f) = \rho\left(\sum_{j=1}^{m} h_j g_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \rho(h_j)\, g_j.$$

Dabei ist der Grad der $\rho(h_j)$ gleich dem Grad der h_j und somit kleiner als der Grad von f und sie gehören zum Invariantenring, so dass die $\rho(h_j)$ nach Induktionsvoraussetzung in der von den g_j erzeugten Algebra liegen. $\square$

Korollar 12.7. *Es sei G eine Gruppe, die auf dem positiv graduierten Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ als Gruppe von homogenen K-Algebraautomorphismen operiere. Es sei vorausgesetzt, dass der Invariantenring ein homogener direkter Summand des Polynomringes ist. Dann ist der Invariantenring eine endlich erzeugte K-Algebra.*

Beweis. Es sei I_G das von allen Invarianten positiven Grades erzeugte Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Aufgrund des Hilbertschen Basissatzes besitzt I_G ein endliches Idealerzeugendensystem. Daher folgt die Aussage aus Lemma 12.6. □

Faktorialität der Invariantenringe

Während Invariantenringe unter schwachen Voraussetzungen normal sind, ist die Faktorialität eher eine seltene Eigenschaft. In Beispiel 7.13 haben wir eine lineare Operation einer zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ auf $K[U, V]$ kennengelernt, deren Invariantenring gleich $K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$ ist. Die Gleichung $XY = Z^n$ zeigt, dass eine zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen in irreduzible Elemente vorliegt. Dieser Invariantenring ist also nicht fakoriell.

Satz 12.8. *Es sei R ein faktorieller Bereich und es sei G eine endliche Gruppe, die auf R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Die Charaktergruppe zu G mit Werten in der Einheitengruppe $R^\times$ sei trivial, d.h. es ist*

$$\mathrm{Hom}\left(G, R^\times\right) \,=\, 0.$$

Dann ist auch der Invariantenring faktoriell.

Beweis. Wir zeigen, dass $F \in R^G$, $F \neq 0$, eine im Wesentlichen eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren besitzt. Sei

$$F \,=\, F_1^{r_1} \cdots F_n^{r_n}$$

die Zerlegung in R in irreduzible Faktoren, wobei die F_i paarweise nicht (in R) assoziiert seien. Für jedes $\sigma \in G$ ist dann auch

$$F \,=\, F\sigma \,=\, (F_1\sigma)^{r_1} \cdots (F_n\sigma)^{r_n}\,.$$

Wegen der Faktorialität von R muss diese Zerlegung mit der ursprünglichen Faktorzerlegung übereinstimmen, d.h. zu jedem i gibt es ein j und eine Einheit $a_{ij} \in R^\times$ mit

$$F_i\sigma \,=\, a_{ij}F_j.$$

Es sei

$$\{1, \ldots, n\} \,=\, \biguplus_{j \in J} I_j$$

die disjunkte Zerlegung der Indexmenge, bei der zwei Indizes i, j in der gleichen Teilmenge landen, wenn es ein $\sigma \in G$ gibt derart, dass $F_i\sigma$ und F_j assoziiert sind. Wir setzen

$$H_j \,:=\, \prod_{i \in I_j} F_i.$$

Insbesondere ist dann

$$F \,=\, \prod_{j \in J} H_j^{r_j}.$$

Es ist

$$H_j\sigma = \left(\prod_{i \in I_j} F_i \right) \sigma = \prod_{i \in I_j} (F_i \sigma) = a_j(\sigma) \prod_{i \in I_j} F_i = a_j(\sigma) H_j$$

mit einer (von σ abhängigen) Einheit

$$a_j(\sigma) = \frac{H_j\sigma}{H_j}.$$

An dieser letzten Darstellung sieht man, dass die Zuordnung $G \to R^\times$, $\sigma \mapsto a_j(\sigma)$, ein Charakter ist. Nach Voraussetzung ist dieser also trivial, und damit sind die H_j invariant. Somit ist

$$F = \prod_{j \in J} H_j$$

eine Faktorzerlegung in R^G. Die H_j sind dabei irreduzibel in R^G, da eine Faktorzerlegung $H = AB$ sofort zu einer Zerlegung von $H_j = \prod_{i \in I_j} F_i$ in Teilprodukte führt, die aber wegend er Wahl der I_j nicht invariant sein können. Wenn $F = \prod_\ell A_\ell$ eine beliebige Zerlegung von F in irreduzible Faktoren $A_\ell \in R^G$ ist, so sind die A_ℓ, aufgefasst in R, Produkte gewisser F_i, und wegen der Wahl der I_j wird A_ℓ sogar von einem H_j (in R und in R^G) geteilt. Es liegt also eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren vor und damit ist nach Lemma 11.13 (2) faktoriell. □

Korollar 12.9. *Es sei K ein Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf R als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Die Charaktergruppe $G^\vee$ sei trivial. Dann ist auch der Invariantenring faktoriell.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 12.8. □

Das Beispiel der symmetrischen Gruppe zusammen mit dem nichttrivialen Signumscharakter, wo der Invariantenring ein Polynomring ist, zeigt, dass die Bedingung des vorstehenden Satzes nicht notwendig für die Faktorialität des Invariantenringes ist.

Die Krulldimension

Definition 12.10. Sei R ein kommutativer Ring. Eine Kette aus Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

nennt man *Primidealkette der Länge n* (es wird also die Anzahl der Inklusionen gezählt, nicht die Anzahl der beteiligten Primideale). Die *Dimension* (oder *Krulldimension*) von R ist das Supremum über alle Längen von Primidealketten. Sie wird mit $\dim(R)$ bezeichnet.

Wir werden hier die Dimensionstheorie nicht systematisch entwickeln. Ohne Beweis teilen wir das folgende Ergebnis mit.

Satz 12.11. *Es sei R ein noetherscher Ring der Dimension d. Dann besitzt der Polynomring $R[X]$ die Dimension $d+1$.*

Insbesondere ist die Dimension des Polynomringes $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K gleich n. Wir werden bald, ausgehend von der Ganzheit über dem Invariantenring, sehen, dass der Invariantenring dimensionsgleich zum Ausgangsring ist.