Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_σ ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\sigma(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge null sind. Zeige, dass

$$\det(M_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

ist.

Aufgabe 6.2. Man mache sich klar, dass die symmetrische Gruppe S_3 die uneigentliche Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks ist und die alternierende Gruppe A_3 dabei die eigentliche Symmetriegruppe ist. Ebenso für die S_4, die A_4 und das (gleichseitige) Tetraeder.

Aufgabe 6.3. Wie findet man die in Aufgabe 6.2 angesprochenen Figuren in der natürlichen Operation der S_3 bzw. S_4 auf dem $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ wieder?

Man denke an Aufgabe 3.16.

Aufgabe 6.4. Drücke das Quadrat der Vandermondschen Determinante mit den elementarsymmetrischen Polynomen aus.

Aufgabe 6.5. Es sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra, auf der eine Gruppe G als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Zeige, dass ein Element $f \in R$, $f \neq 0$, allenfalls bezüglich eines Charakters semiinvariant sein kann.

Es sei M eine Menge, auf der eine Gruppe G operiere. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt *G-invariant*, wenn zu jedem $x \in T$ und jedem $\sigma \in G$ auch $\sigma x \in T$ gilt.

Aufgabe 6.6. Es sei M eine Menge, auf der eine Gruppe G operiere und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann eine G-invariante Teilmenge ist, wenn T eine Vereinigung von Bahnen ist.

Aufgabe 6.7. Es sei M eine Menge, auf der eine Gruppe G operiere. Es sei $T \subseteq M$ eine G-invariante Teilmenge. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es gibt eine natürliche Abbildung
$$\varphi\colon\, T\backslash G \longrightarrow M\backslash G$$
zwischen den Bahnenräumen.

(2) Die Abbildung φ ist injektiv.

(3) Die Abbildung φ muss nicht surjektiv sein.

Aufgabe 6.8. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das unter der Gruppenoperation invariant ist (es gelte also $f\sigma \in \mathfrak{a}$ für $f \in \mathfrak{a}$ und jedes $\sigma \in G$). Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es gibt eine natürliche Operation von G auf dem Restklassenring $R/\mathfrak{a}$.

(2) Es gibt einen Ringhomomorphismus
$$\psi\colon\, R^G/\left(\mathfrak{a} \cap R^G\right) \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^G .$$

(3) Die Abbildung ψ aus Teil (2) ist injektiv.

(4) Wenn G endlich ist und R einen Körper der Charakteristik 0 enthält, so ist ψ surjektiv.

Aufgabe 6.9. Zeige durch ein Beispiel, dass der Reynolds-Operator zur Operation einer endlichen Gruppe auf einem kommutativen Ring kein Ringhomomorphismus sein muss.

Aufgabe 6.10. Es sei $R \subseteq S$ ein direkter Summand von kommutativen Ringen. Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal und $f \in R$. Zeige, dass aus $f \in IS$ die Zugehörigkeit $f \in I$ folgt.

Aufgabe 6.11. Es seien R und S kommutative Ringe, wobei R ein direkter Summand von S sei, sagen wir $S = R \oplus V$ mit einem R-Modul V. Zeige, dass für ein multiplikatives System $M \subseteq R$ die Beziehung
$$S_M \,=\, R_M \oplus V_M$$
gilt.

Aufgabe 6.12. Es seien R und S kommutative Ringe, wobei R ein direkter Summand von S sei, sagen wir $S = R \oplus V$ mit einem R-Modul V. Zeige, dass für ein Ideal $I \subseteq R$ die Beziehung

$$S/IS = R/I \oplus V/IV$$

gilt.

Aufgabe 6.13. Betrachte die Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K. Bestimme (zu $n = 2, 3, 4$ und in geeigneter Charakteristik) für jede Untergruppe $H \subseteq S_n$ den Reynolds-Operator von R nach R^H.

In Beispiel 6.9 trat eine sogenannte *erzwingende Algebra* auf.

Aufgabe 6.14. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei $f \in R$ ein weiteres Element. Dann nennt man die R-Algebra

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n + f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den $f_1, \ldots, f_n, f$. Zeige, dass A folgende Eigenschaft erfüllt: Zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ in einen kommutativen Ring S mit der Eigenschaft $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$ gibt es einen R-Algebrahomomorphismus $\vartheta : A \longrightarrow S$. Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K mit der Standardgraduierung. Die Einheitengruppe $K^\times$ operiert linear auf K^n und auf dem Polynomring durch skalare Multiplikation. Zeige, dass die d-te Stufe R_d mit dem Raum der relativen Invarianten bezüglich des Charakters

$$K^\times \longrightarrow K^\times,\ z \longmapsto z^d,$$

übereinstimmt.

Aufgabe 6.16. (5 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und jedem $f \in R$ ist der Ausdruck
$$\psi_k(f) = \sum_{T \subseteq G,\, \#(T)=k} \prod_{\sigma \in T} f\sigma$$
invariant.

(2) Wenn R einen Körper der Charakteristik 0 enthält, so erzeugen die $\psi_k(f)$, $f \in R$, $k \in \mathbb{N}$, den Invariantenring.

(3) Teil (2) gilt nicht ohne die Voraussetzung an die Charakteristik.

Aufgabe 6.17. (5 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere, wobei die Ordnung von G eine Einheit in R sei. Es sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Es sei ρ der Reynolds-Operator zu G, δ der Reynolds-Operator zu H und γ der Reynolds-Operator zur Operation von G/H auf R^H (siehe Proposition 5.1). Zeige
$$\rho = \gamma \circ \delta.$$