Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 32

Aufgabe 32.1. Finde eine kompakte Untergruppe innerhalb der komplexen invertierbaren Diagonalmatrizen.

Aufgabe 32.2. Zeige, dass die unitäre Gruppe $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ (als Teilmenge des $\mathbb{C}^{n^2}$) abgeschlossenen und beschränkt, also kompakt ist.

Aufgabe 32.3. Zeige, dass die additive Gruppe $(\mathbb{C}, +, 0)$ keine kompakte Untergruppe enthält, die in der Zariski-Topologie dicht ist.

Aufgabe 32.4. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix. Zeige, dass $\exp A$ in der $\mathbb{C}$-Unteralgebra $\mathbb{C}[A]$ liegt.

Aufgabe 32.5. Zeige, dass für vertauschbare Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Beziehung

$$\exp(A \circ B) = (\exp A) \circ (\exp B)$$

gilt.

Aufgabe 32.6. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix. Zeige, dass die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\, t \longmapsto \exp(tA),$$

gleich $A \circ \exp(tA)$ ist.

Aufgabe 32.7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $\exp(tA) \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ für alle $t \in \mathbb{C}$. Zeige, dass A schiefhermitsch ist.

Aufgabe 32.8. Zeige, dass man auf die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\, A \longmapsto \exp A,$$

in der Nullmatrix den Satz über die Umkehrabbildung anwenden kann.