**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2012/2013**

# Invariantentheorie

## Arbeitsblatt 31

Aufgabe 31.1. Es sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(p)$ nicht linear reduktiv über $K$ ist.

Aufgabe 31.2. Es sei $K$ ein Körper und es sei $A$ eine $m \times n$-Matrix und $B$ eine $n \times m$-Matrix über $K$. Zeige

$$\operatorname{Spur}(A \circ B) = \operatorname{Spur}(B \circ A).$$

Aufgabe 31.3. Es sei $K$ ein Körper und es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $K$-Vektorräume. Zeige, dass durch die Spur

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \times \operatorname{Hom}_K(W, V) \longrightarrow K,\ (A, B) \longmapsto \operatorname{Spur}(A \circ B),$$

eine vollständige Dualität gestiftet wird, dass also $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ und $\operatorname{Hom}_K(W, V)$ in natürlicher Weise dual zueinander sind.

Aufgabe 31.4. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $G$ eine linear reduktive Gruppe über $K$, die auf einem endlichdimensionalen $K$-Vektorraum rational operiere. Zeige unter Betrachtung der homogenen Komponenten von $K[V]$ ohne Verwendung von Satz 31.1 und Lemma 31.2, dass $K[V]^G$ ein direkter Summand von $K[V]$ ist.

Aufgabe 31.5. Es sei $G$ eine linear reduktive Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K$, und es seien zwei rationale Darstellungen von $G$ in die beiden endlichdimensionalen $K$-Vektorräume $V$ und $W$ gegeben. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine surjektive lineare Abbildung, die mit den Operationen verträglich sei. Zeige

$$\varphi(V^G) = W^G.$$