Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 29

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe liefert eine Verallgemeinerung von Korollar 80.7 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)).

Aufgabe 29.1. Zeige folgende Aussage über das Dachprodukt: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $v_1, \ldots, v_r$ und $w_1, \ldots, w_r$ Vektoren in V, die miteinander in der Beziehung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

stehen, wobei M eine $r \times r$-Matrix bezeichnet. Dann gilt in $\bigwedge^r V$ die Beziehung

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = (\det M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_r .$$

Aufgabe 29.2. Zeige, dass die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C}^\times, 1, \cdot)$ eine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.3. Zeige, dass die additive Gruppe $(\mathbb{C}, 0, +)$ eine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.4. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ keine lineare Gruppe über $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 29.5. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ keine affin-algebraische Gruppe über $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 29.6. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$, versehen mit der diskreten Topologie, über keinem Körper K eine affin-algebraische Gruppe ist.

Aufgabe 29.7. Bestimme den Zariski-Abschluss der von der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 29.8. Zeige, dass das Produkt von zwei linearen Gruppen wieder eine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.9. a) Sei K ein Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe von K nicht zyklisch unendlich ist.

b) Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik nicht zwei ist. Zeige, dass die Einheitengruppe von R nicht zyklisch unendlich ist.

c) Beschreibe einen kommutativen Ring, dessen Einheitengruppe zyklisch unendlich ist.

Wir erinnern an zwei Definitionen für Matrizen.

Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

nennt man *obere Dreiecksmatrix*.

Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man (obere) *Scherungsmatrix*.

Aufgabe 29.10. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$-oberen Dreiecksmatrizen über K eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 29.11. Es sei K ein Körper und $\mathrm{ODG}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-oberen Dreiecksmatrizen über K. Zeige, dass es einen (natürlichen) surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathrm{ODG}_n(K) \longrightarrow \left(K^\times, \cdot, 1\right)^n$$

gibt. Bestimme den Kern von φ.

Aufgabe 29.12. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$-oberen Scherungsmatrizen über K eine Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 29.13. Es sei K ein Körper und $\mathrm{OSG}_n(K)$ die Gruppe der $n \times n$-oberen Scherungsmatrizen über K. Zeige, dass es einen (natürlichen) surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathrm{OSG}_n(K) \longrightarrow (K,+,0)^{n-1}$$

gibt. Bestimme den Kern von φ.

Zeige in den vorstehenden Aufgaben, dass jeweils eine lineare Gruppe (über einem nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossenen Körper) vorliegt, und dass die Gruppenhomomorphismen algebraisch definiert sind.

Aufgabe 29.14. Es sei K ein Körper und $\mathrm{OSG}_3(K)$ die Gruppe der 3×3-oberen Scherungsmatrizen über K. Zeige, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{OSG}_3(K) \longrightarrow K^2 \longrightarrow 0$$

gibt, und dass $\mathrm{OSG}_3(K)$ nicht isomorph zu K^3 ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.15. (4 Punkte)

Bestimme den Zariski-Abschluss der von der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 29.16. (4 Punkte)

Zeige, dass eine zyklische Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bei $n \geq 2$ nicht Zariski-dicht ist.

Aufgabe 29.17. (8 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass $(\mathbb{Z},+,0)$ keine lineare Gruppe über K ist.