Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 26

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+YZ^3)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 26.2. Bestimme für die binäre Tetraedergruppe die Dimension von $\mathbb{C}[U,V]_d^{BT}$ für $d \leq 12$.

Aufgabe 26.3. Bestimme für die binäre Oktaedergruppe die Dimension von $\mathbb{C}[U,V]_d^{BO}$ für $d \leq 24$.

Aufgabe 26.4. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^5)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 26.5. Zeige, dass es auf den A- und den D-Singularitäten und auf der E_6 und der E_7-Singularität glatte Kurven gibt, die durch den singulären Punkt laufen.

Aufgabe 26.6. Bestätige, dass die in Beispiel 26.4 angegebenen Polynome $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ in der Tat invariant sind, und dass die dort angegebene Relation besteht.

Aufgabe 26.7. Zeige, dass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^5) \longrightarrow \mathbb{C}[R,S,T]/(RS-T^2)$$

gibt.

Aufgabe 26.8. Zeige, dass die Ringe der ADE-Singularitäten eine positive Graduierung besitzen. Man gebe diese jeweils an.

Wir erinnern an folgende Definition.

Zu einer Gruppe G heißt die von allen Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$, erzeugte Untergruppe die *Kommutatorgruppe* von G. Sie wird mit $K(G)$ bezeichnet.

Die Kommutatorgruppe ist nach Lemma 20.5 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2011)) ein Normalteiler, die Restklassengruppe $G/K(G)$ nennt man auch die *Abelianisierung* von G.

Aufgabe 26.9. Bestimme zu den endlichen Untergruppen $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ jeweils die Kommutatoruntergruppe und die Abelianisierung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.10. (4 Punkte)

Zeige, dass es auf der E_8-Singularität keine glatte Kurve gibt, die durch den singulären Punkt läuft.